Per Amund Amundsen
Institutt for matematikk og naturvitenskap
UNIVERSITETET I STAVANGER

Notater til forelesningene i BIT 390 Energifysikk 26.09 2011

Tillegg og kommentarer til læreboken *Fysikk og energiressurser* av Øyvin Holter, Finn Ingebretsen og Hugo Parr (3. utgave, 2010).

3.1.2

Faktoren 2 i lign.(3.1) skyldes at vi har varmeovergang fra begge sider av hvert lag. Modellen for utnyttelse av fjellvarme kan forøvrig med vise justeringer også anvendes for bruk av fjell som reservoar for varmepumper.

3.1.3

Utledningen i dette avsnittet i læreboken er litt kjapp. Vi lar T_1 være temperaturen til det sirkulerende vannet, og antar at denne ikke varierer nevneverdig. Vi velger et koordinatsystem i z-retningen med $z = 0$ i det underste sjiktet vannet sirkulerer, og lar fjellets temperatur være $T(t, z)$. En randbetingelse er at fjellet på begge sider av et lag (som har tykkelsen h) har samme temperatur som vannet, dvs $T(t, 0) = T(t, h) = T_1$. En annen grensebetingelsen er at fjellet har temperaturen $T(t, z) = T_0$ før vi begynner å utvinne varmen, altså for $t \leq 0$, og spesielt for $t = 0$.

Vi ser imidlertid at disse to randbetingelsene er inkonsistente, siden de medfører at $T(0, 0)$ er lik både T_0 og T_1. Modellen er altså for enkel. Det som skjer fysisk er at det begynner å lekke varme fra reservoaret allerede når fjellet sprekkes opp og vannledningene legges. Man kan selvsagt tenke seg mer kompliserte modeller som tar hensyn til dette. En fornuftig tilnærmelse, som er den som implisitt velges i boken, er at for $t = 0$ er i alle fall temperaturen midt mellom de oppsprukne lagene, i $z = h/2$, fortsatt lik den opprinnelige temperaturen i fjellet: $T(0, h/2) = T_0$. Denne antagelsen gir konsistente randbetingelser.

Vi har åpenbart at $T(t, z) = T_1$ er en løsning av lign. (3.6). Vi søker derfor en løsning for $t > 0$ på formen:

$$T(t, z) = T_1 + \Phi(t)\Psi(z)\,. \tag{3.7a}$$

Randbetingelsen $T(t, 0) = T(t, h) = T_1$ medfører $\Psi(0) = \Psi(h) = 0$. Lign. (3.8) og (3.9) i læreboken gjelder fortsatt. Legg merke til at siden temperaturen $T(t, z)$ avtar med t, må vi ha $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t < 0$, så $\sigma > 0$. Ligningen for $\Psi(z)$ kan skrives:

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}z^2} + K^2\Psi = 0\,, \tag{3.8a}$$

der $K^2 = \sigma\rho c/\lambda > 0$. Denne ligningen har generell løsning:

$$\Psi(z) = U\cos(Kz) + V\sin(Kz)\,, \tag{3.10a}$$

der U og V er integrasjonskonstanter. [Det er en trykkfeil i lign. (3.10) i læreboken, faktoren a i nevneren under kvadratroten skal være λ.]

Randbetingelsen $\Psi(0) = 0$ gir $U = 0$. Da gir videre betingelsen $\Psi(h) = 0$ at $V\sin(Kh) = 0$, og siden valget $V = 0$ bare gir oss tilbake løsningen $T(t, z) = T_1$, så betyr dette at $Kh = \pi$, dvs vi kan bestemme separasjonskonstanten σ:

$$K = \sqrt{\frac{\sigma\rho c}{\lambda}} = \frac{\pi}{h} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma = \frac{\pi^2\lambda}{\rho h c^2}\,. \tag{3.12a}$$

Dette gir løsningen:

$$T(t, z) = T_1 + \Theta\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)e^{-\sigma t}\,, \tag{3.11$_a$}$$

der $\Theta = \Phi_0 V$. Av randbetingelsen $T(0, z/2) = T_0$ får vi da $T(0, h/2) = T_1 + \Theta\sin(\pi/2) = T_1 + \Theta = T_0$, så $\Theta = T_0 - T_1$, og vi har lign. (3.11) i læreboken.

Det er en trykkfeil i avsnittet som følger lign. (3.15), hvor uttrykket for $h^2\sigma$ skal ha enheten $\mathrm{m}^2/\text{år}$: $h^2\sigma = 368\,\mathrm{m}^2/\text{år}$.

[En takk til Jan Finjord for innspill til kommentarene til dette avsnittet.]

3.2

Tidlig utnyttelse av vannkraften. Møllekvern med overfallshjul fra Weissensee i Østerrike. (Foto: Eric Jensen).

Hvis overflaten til et vannreservoar ligger i høyden h, «fallhøyden», over nivået til turbinene i et vannkraftverk, er den potensielle energien lagret i vannet gitt som $E_P = mgh = \rho Vgh$, der m er massen til vannet, V volumet og ρ tettheten, mens g er tyngdeakselerasjonen. Den elektriske effekten levert blir:

$$P_e = \dot{E}_P = \eta\rho gh\dot{V}\,,$$

der $\dot{V}$ er volumstrømmen av vann inn på turbinene og η er kraftverkets totale virkningsgrad. Siden tap i rørsystemet og turbinen og tap i den elektriske generatoren er uavhengige av hverandre, kan man skrive $\eta = \eta_v\eta_g$, der η_v tar hensyn til tap i rørledningen og turbinen (det er viktig at vannet strømmer langsomt i rørledningene!), mens η_g er virkningsgraden til den elektriske generatoren.

Det finnes mange forskjellige praktiske utforminger både av demninger for vannreservoarer og for valget av turbiner. Løsningen som velges avhenger av naturforholdene på stedet, inklusive fallhøyden, miljøhensyn og økonomi.