Per Amund Amundsen
Institutt for matematikk og naturvitenskap
UNIVERSITETET I STAVANGER

Notater til forelesningene i BIT 390 Energifysikk 16.09 2011

Tillegg og kommentarer til læreboken *Fysikk og energiressurser* av Øyvin Holter, Finn Ingebretsen og Hugo Parr (3. utgave, 2010).

2.7

Tillegg

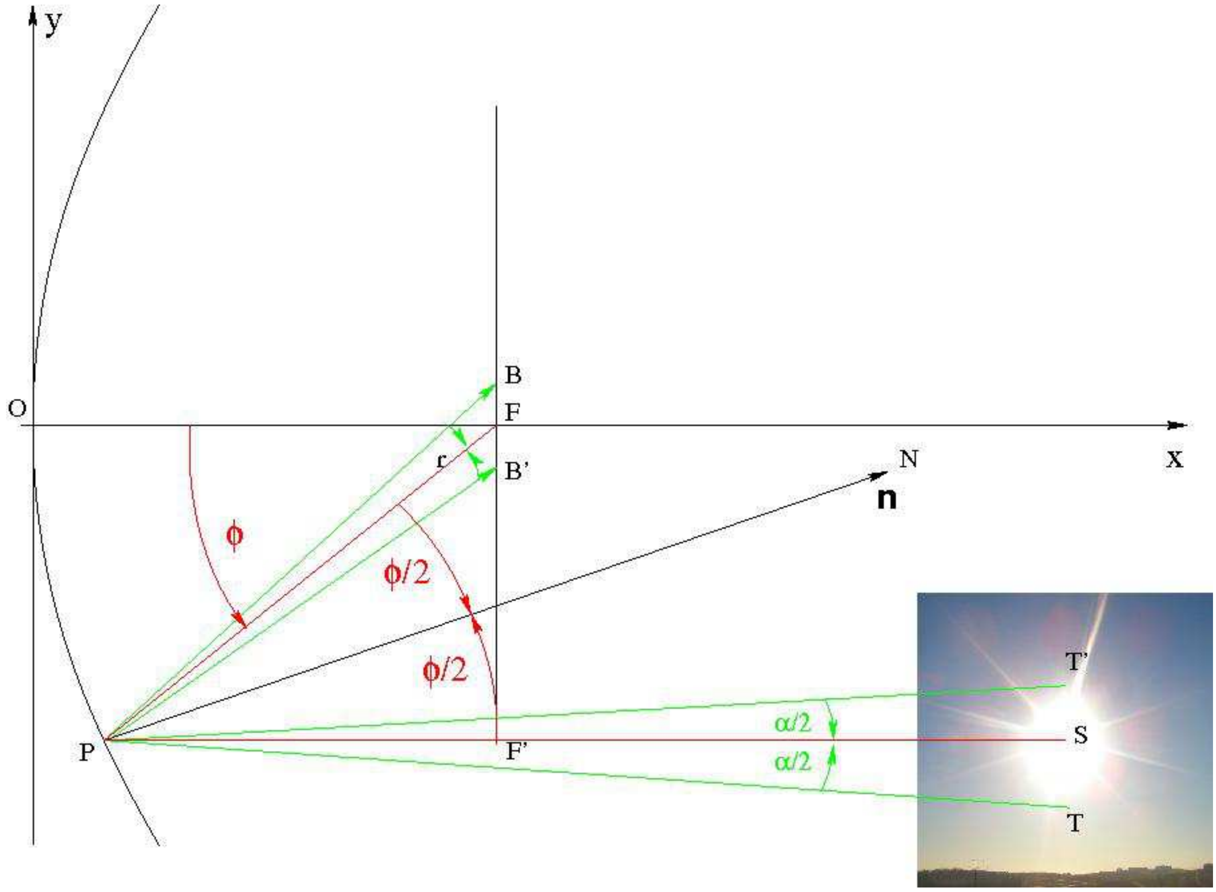

Fig. 2.12a: Beregning av størrelsen på bildet av en utstrakt strålekilde for et parabolsk speil.

Vi skal gi en mer utfyllende utledning av ligningene (2.10) og (2.11) i læreboken. Figur 2.12a, som er en mer detaljert versjon av bokens fig. (2.12), viser hvordan størrelsen på bildet av en gjenstand i brennplanet kan beregnes for et parabolsk speil. Vi minner om at et slikt speil samler alle stråler som kommer inn parallelt med symmetriaksen, som vi velger som x-akse, i et punkt, *brennpunktet* (fokus), F. Som vi skal se, vil parallelle stråler som kommer inn fra en annen retning, tilnærmet samles i et annet punkt i *brennplanet* (fokalplanet), som er et plan gjennom brennpunktet F vinkelrett på x-aksen. Avstanden OF fra sentrum av speilet, O, til brennpunktet er *brennvidden* (fokallengden), f, så F har koordinatene $(f, 0)$.

Vi ser på en stråle fra midten av solskiven som kommer inn parallelt med x-aksen, og treffer speilet i punktet P, hvoretter strålen reflekteres til F. Siden linjen PF skjærer de parallelle linjene OF og SP, blir vinklene $\angle SPF$ og $\angle PFO$ like: $\angle SPF = \angle PFO = \phi$. Men loven for speiling sier at *innfallsvinkelen* = *refleksjonsvinkelen*, så hvis linjen PN står vinkelrett på speilet i punktet P, må $\angle SPN = \angle NPF = \phi/2$.

La α være solens vinkeldiameter ($\alpha = 32'$, eller litt over $\frac{1}{2}^\circ$), dvs. $\angle TPT' = \alpha$, der T og T' er to diametralt motsatte punkter på randen av solskiven. Da er $\angle TPS = \angle T'PS = \alpha/2$, så $\angle TPN = \phi/2 + \alpha/2$ og $\angle T'PN = \phi/2 - \alpha/2$. Men speil-loven gjelder også for randstrålene TP og $T'P$. Altså treffer strålen fra T brennplanet i et punkt B slik at $\angle TPN = \angle NPB = \phi/2 + \alpha/2$. På samme måte treffer strålen fra T' brennplanet i B', med $\angle T'PN = \angle NPB' = \phi/2 - \alpha/2$. Men siden $\angle NPF = \phi/2$, er vinklene $\angle BPF$ og $\angle B'PF$ da begge lik $\alpha/2$, og vi har funnet at *bildet* av solen har *samme* vinkeldiameter som solen selv: $\angle BPB' = \angle TPT' = \alpha$. Vi legger også merke til at bildet er *snudd*, den nederste randen, T, er avbildet øverst, i B.

For å finne størrelsen på bildet, $W' = |\overrightarrow{BB'}|$ må vi ta litt trigonometri til hjelp. Vi minner om sinus-proporsjonen for trekanter: Hvis A, B og C er hjørnene i en trekant, og de korresponderende motstående sidene har lengder henholdsvis a, b og c, gjelder:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \tag{2.10a}$$

Dersom F' er skjæringspunktet mellom brennplanet og solstrålen SP, så er vinkelen $\angle BF'P$ rett, og $\chi = \angle PBF' = \pi/2 - \angle SPB = \pi/2 - \phi - \alpha/2$ (se figuren). Hvis avstanden FP kalles r, og avstanden BF for w, gir sinusproporsjonen anvendt på trekanten BPF:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\chi}{r} &= \frac{\sin(\alpha/2)}{w}\,, \\ w &= \frac{r\sin(\alpha/2)}{\sin(\pi/2-\phi-\alpha/2)} = \frac{r\sin(\alpha/2)}{\cos(\phi+\alpha/2)} = \frac{r\sin(\alpha/2)}{\cos(\phi)\cos(\alpha/2)-\sin(\phi)\sin(\alpha/2)} \\ &= \frac{r\tan(\alpha/2)}{\cos\phi\,[1-\tan(\alpha/2)]}\,. \end{aligned} \tag{2.10b}$$

Hvis samme beregning gjøres på trekanten $B'PF$, og vi kaller linjestykket FW' for w', blir på samme måte:

$$w' = \frac{r\tan(\alpha/2)}{\cos\phi\,[1+\tan(\alpha/2)]}\,. \tag{2.10c}$$

Ved å kombinere disse to uttrykkene finnes W', avstanden BB', som i boken:

$$W' = w + w' = \frac{r\tan(\alpha/2)}{\cos(\phi)}\left[\frac{1}{1-\tan(\alpha/2)} + \frac{1}{1+\tan(\alpha/2)}\right] = \frac{2r\tan(\alpha/2)}{\cos\phi\left[1-\tan^2(\alpha/2)\right]} \approx \frac{2r\tan(\alpha/2)}{\cos\phi} \tag{2.10}$$

Den siste tilnærmelsen er meget god, fordi med $\alpha = 32' = 0.0093$ (radian), er $\tan(\alpha/2) = 4.65 \cdot 10^{-3}$ og $\tan^2(\alpha/2) = 2.17 \cdot 10^{-5}$.

Så langt har vi ikke brukt egenskapene til speilet, og lign. (2.10) er derfor gyldig for alle slags speil. Men for å finne et uttrykk for r må vi bruke det vi vet om speilets form. Fra teorien for kjeglesnitt har vi at ligningen for en parabel med akse langs x-aksen og brennvidde f oppfyller:

$$x = \frac{y^2}{4f}\,. \tag{2.10d}$$

Vi introduserer en ny x-koordinat, slik at brennpunktet blir det nye origo, dvs. vi setter $x' = x - f$, mens $y' = y$ fortsatt. I dette nye systemet innføres dessuten polarkoordinater, der polarvinkelen ϕ måles fra den *negative* x'-aksen:

$$x' = x - f = -r\cos\phi\,, \qquad y' = y = -r\sin\phi\,. \tag{2.10e}$$

Vi ser at $\phi = 0$ når $x' = -f$. Dette uvanlige valget gjør vi fordi punktet P, som jo ligger på paraboloiden (speilet), på denne måten får polarkoordinatene (r, ϕ).

Uttrykt i disse koordinatene får parabelen ligningen:

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2\sin^2\phi = 4fx = 4f(f+x') = 4f^2 - 4fr\cos\phi\,, \\ r^2\sin^2\phi &+ 4rf\cos\phi - 4f^2 = 0\,, \\ r &= \frac{-4f\cos\phi \pm \sqrt{16f^2\cos^2\phi + 16f^2\sin^2\phi}}{2\sin^2\phi} = \frac{4f(\pm 1 - \cos\phi)}{2(1-\cos^2\phi)} = \frac{2f}{1+\cos\phi}\,. \end{aligned} \tag{2.10f}$$

I siste overgang har vi valgt fortegnet som gir $r > 0$. Ved å kombinere lign. (2.10) og (2.10f) får vi endelig:

$$W' \approx \frac{4f\tan(\alpha/2)}{(1+\cos\phi)\cos\phi}\,. \qquad (2.11a).$$

Dette resultatet gjelder forøvrig også for størrelsen på et bilde dannet av en konveks linse. For små ϕ er $\cos\phi \approx 1$, og W' blir *uavhengig* av hvor på speilet strålen treffer. Dette er betingelsen for at speilet (eller linsen) skal gi et *skarpt* bilde, uten avbildningsfeil («koma»). At speilet gir skarpe bilder er imidlertid uten betydning for bruket av det som energisamler.

Vi ser at W' øker med ϕ. Størrelsen på det belyste feltet er altså gitt av *randstrålene*, som treffer kanten av speilet, som vi lar tilsvare vinkelen ϕ_m ($= \phi_{max}$ i læreboken). Denne strålen treffer speilet i avstanden $|y_m|$ fra symmetriaksen, som er radien til speilet. Hvis vi kaller avstanden fra kanten til brennpunktet for r_m og benytte lign. (2.10f), finnes diameteren, til speilet, D, som:

$$D = 2|y_m| = 2r_m\sin\phi_m = \frac{4f\sin\phi_m}{1+\cos\phi_m} = 4f\sqrt{\frac{1-\cos\phi_m}{1+\cos\phi_m}} = 4f\tan(\phi_m/2)\,. \qquad (2.11b)$$

Denne ligningen kan enkelt inverteres til å gi:

$$\phi_m = 2\arctan\left(\frac{D}{4f}\right) = \arccos\left(\frac{16f^2-D^2}{16f^2+D^2}\right)\,. \qquad (2.11b)$$

Forholdet $f/D = f{:}D$, dvs. brennvidden målt i speildiametere, kalles ofte *åpningsforholdet* eller *f-verdien* til et fokuserende speil eller en linse. Hvis vi setter inn $f = 0.45\,\mathrm{m}$ og $D = 1.2\,\mathrm{m}$, finner vi $\theta_m = 67.4°$, som i boken.

Vi ser at fordi solen har så liten vinkeldiameter, blir arealet som varmes opp, $A_t = \pi W_n'^2/4$ svært lite, dersom ikke brennvidden f er meget stor.

Boken har en trykkfeil i formelen for konsentrasjonsfaktoren, k, den skal åpenbart være:

$$k = \frac{A_c}{A_t}\,,$$

der A_c er arealet av kollektoren i fokalplanet, og A_t er systemets projiserte totalareal loddrett på strålingen.

For et parabolsk speil rettet direkte mot solen, har vi totalt projisert kollektorareal $A_c = \pi D^2/4$, så den maksimale konsentrasjonsfaktoren blir:

$$k = \frac{A_c}{A_t} = \left(\frac{D}{W_m'}\right)^2 = \left(\frac{\cos\phi_m\sin\phi_m}{\tan(\alpha/2)}\right)^2\,. \qquad (2.11c)$$

For speilet som er nevnt i boken, får vi $k = 7370$. Den maksimalt mulige verdien for k får vi når $\sin\phi_m = \cos\phi_m$, dvs. når $\phi_m = 45°$ eller $f/D = 1/(4\tan(\phi_m/2)) = (1+\sqrt{2})/4 = 0.605$. Den tilhørende maksimale konsentrasjonsfaktoren blir: $k = k_{max} = 1/(4\tan^2(\alpha/2)) = 11\,500\,$.

Beregningene for en parabolsk-sylindrisk kollektor er nøyaktig de samme, bortsett fra at uttrykkene for A_t og A_c endrer seg. Vi finner i stedet:

$$k = \frac{A_c}{A_t} = \frac{D}{W_m'} = \frac{\cos\phi_m\sin\phi_m}{\tan(\alpha/2)}\,. \qquad (2.11d)$$

som har maksimumsverdien $k_{max} = 108$, også her for $\phi_m = 45°$.

FIG. 2.13A: Prosjektert fokuserende solkraftverk.