UNIVERSITETET I STAVANGER
Institutt for matematikk og naturvitenskap

Løsningsforslag, eksamen i BIT 390 Energifysikk, 2010 H.

Oppgave 1:

a) Kjølefaktor:

$$K = \frac{Q_L}{W} = \frac{\dot{Q}_L}{P}\,,$$

Varmefaktor:

$$V = \frac{Q_H}{W} = \frac{\dot{Q}_H}{P} = \frac{Q_L + W}{W} = K + 1\,,$$

hvor vi har utnyttet energibevaring: $Q_H = Q_L + W$ (eller $\dot{Q}_H = \dot{Q}_L + P$ for en stasjonær prosess).

b) For en reversibel prosess (f. eks. en Carnot-prosess) gjelder $Q_H/Q_L = T_H/T_L$ (Kelvins definisjon av absolutt temperatur). Altså blir:

$$K_C = \left(\frac{Q_L}{Q_H - Q_L}\right)_{\text{rev}} = \frac{T_L}{T_H - T_L} = \frac{T_L}{\Delta T}\,,$$

og $V_C = K_C + 1 = T_H/\Delta T$.

c) Varmen vi trenger er $\dot{Q} = \dot{Q}_H$, som for en reversibel prosess gir:

$$C(T_i - T_u) = \dot{Q}_H = V_C P_C = \frac{T_i}{T_i - T_u} P_C$$

$$P_C = C\frac{(T_i - T_u)^2}{T_i} = 550\,\text{W}\,.$$

Dersom vi i stedet varmer opp med ovner, blir energibehovet $P = C(T_i - T_u) = V_C P_C = 8.0\,\text{kW}$.

d) Vi har $\dot{Q}_H = \dot{Q}_L + P$. Av dette er Q_L varmen som pumpes av kjølemaskinen fra det kalde reservoaret (utendørs) til det varme (innendørs), noe som avhenger av kjølemotorens konstruksjon og temperaturene i de to reservoarene. Motoreffekten P er den tilførte energien, som omdannes til varme av motoren. Så lenge denne avgir varmen innendørs, er dette bidraget uavhengig av motorens konstruksjon og av temperaturene. Dette bidraget får vi også uten noen varmepumpe, hvis vi i stedet bruker motoren som en ovn. Det er følgelig lite naturlig å regne det med til varmepumpens energieffektivitet.

e) Ut fra resonnementet i forrige punkt har vi:

$$V = K + 1 = \epsilon K_C + 1 = \epsilon\frac{T_u}{T_i - T_u} + 1 = \frac{T_i - (1-\epsilon)T_u}{T_i - T_u}\,.$$

Da blir

$$P = \dot{Q}_H/V = C\frac{(T_i - T_u)^2}{T_i - (1-\epsilon)T_u}\,.$$

Innsatt får vi $P = 1020\,\text{W}$ for $T_u = 0\,^\circ\text{C}$ og $P = 2230\,\text{W}$ for $T_u = -10\,^\circ\text{C}$.

f) Av den oppgitte formen for $T(t,z)$ finner vi ved innsetting:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= -A\omega e^{-kz}\sin(\omega t - kz + \phi_1) - B\omega e^{kz}\sin(\omega t + kz + \phi_1)\,,\\
\frac{\partial T}{\partial z} &= G - Ake^{-kz}\cos(\omega t - kz + \phi_1) + Ake^{-kz}\sin(\omega t - kz + \phi_1)\\
&\quad + Bke^{kz}\cos(\omega t + kz + \phi_1) - Bke^{kz}\sin(\omega t + kz + \phi_1)\,,\\
\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= Ak^2e^{-kz}\cos(\omega t - kz + \phi_1) - 2Ak^2\sin(\omega t - kz + \phi_1) - Ak^2e^{-kz}\cos(\omega t - kz + \phi_1)\\
&\quad + Bk^2e^{-kz}\cos(\omega t + kz + \phi_1) - 2Bk^2\sin(\omega t + kz + \phi_1) - Bk^2e^{-kz}\cos(\omega t + kz + \phi_1)\\
&= -2Ak^2\sin(\omega t - kz + \phi_1) - 2Bk^2\sin(\omega t + kz + \phi_1)\\
&= \frac{2k^2}{\omega}\frac{\partial T}{\partial t}\,.
\end{aligned}
$$

Den oppgitte $T(t,z)$ er altså en løsning av varmeledningsligningen (oppgitt):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,,$$

dersom $2k^2/\omega = \rho c/\lambda$ eller $k = \sqrt{\omega\rho c/2\lambda}$, som oppgitt.

g) Vi neglisjerer jordvarmen, så $G = 0$. Videre må $B = 0$, siden temperaturen ikke kan vokse eksponentielt med dybden. For å ha konsistens mellom løsningen som er funnet og den oppgitte temperaturen på overflaten, $z = 0$, må vi da ha, for alle t:

$$T(t,0) = T_0 + A\cos(\omega t + \phi_1) = T_0 + \Delta T\cos(\Omega t)\,.$$

Denne randbetingelsen er oppfylt dersom $\phi_1 = 0$, $A = \Delta T$ og $\omega = \Omega$. Temperaturen i dybden z er altså gitt som:

$$T(t,z) = T_0 + \Delta T e^{-kz}\cos(\Omega t - kz)\,,$$

der $k = \sqrt{\Omega\rho c/2\lambda}$.

h) Av løsningen i forrige punkt ser vi at temperaturamplituden er gitt som $\Delta T(z) = \Delta T\exp(-kz)$. Med betingelsen $\Delta T(z_0) = 1.0\,\mathrm{K}$ finner vi da dybden z_0 som:

$$z_0 = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{\Delta T(z_0)}{\Delta T}\right) = -\sqrt{\frac{2\lambda}{\Omega\rho c}}\ln\left(\frac{\Delta T(z_0)}{\Delta T}\right) = \sqrt{\frac{\lambda t_0}{\pi\rho c}}\ln\left(\frac{\Delta T}{\Delta T(z_0)}\right) = 4.0\,\mathrm{m}\,.$$

i) Hvis vi neglisjerer temperaturvariasjonene i dybden z_0, så bli temperaturen her $T(t,z_0) \approx T_0 = 7.4\,^\circ\mathrm{C} = 280.4\,\mathrm{K}$. På samme måte som i e) ovenfor får vi da::

$$P = \dot{Q}_H/V = C\frac{(T_i - T_u)(T_i - T_0)}{T_i - (1-\epsilon)T_0} = 659\,\mathrm{W}\,,$$

hvis $T_u = 0.0\,^\circ\mathrm{C}$ og tilsvarende $P = 989\,\mathrm{W}$ hvis $T_u = -10.9\,^\circ\mathrm{C}$. Vi får altså en vesentlig gevinst i forhold til å bruke uteluften som energikilde.

Oppgave 2:

a) Siden jordas tverrsnitt er πR_J^2, er den totale innkommende solenergien som treffer jorda gitt som $\pi R_J^2 S_0$. Stefan-Boltzmanns lov for hele jordoverflaten (en kuleflate) gir den samlede utstrålte energien som $4\pi R_J^2 \sigma T_b^4$. Energibalanse gir da:

$$\pi R_J^2 S_0 = 4\pi R_J^2 \alpha_J \sigma T_b^4 \qquad \Longrightarrow \qquad T_b = \left(\frac{S_0}{4\alpha_J \sigma}\right)^{1/4} = 279\,\mathrm{K} = 6\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

Vi har her brukt $\epsilon_J = \alpha_J$ (se neste punkt). Hvis vi tar hensyn til jordas albedo, $A = 0.3$, får vi tilsvarende:

$$\pi R_J^2 (1-A) S_0 = 4\pi R_J^2 \alpha_J \sigma T_b^4 \qquad \Longrightarrow \qquad T_b = \left(\frac{(1-A)S_0}{4\alpha_J \sigma}\right)^{1/4} = 254\,\mathrm{K} = -19\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

b) Vi har $\alpha(\nu) = \epsilon(\nu)$ for elektromagnetisk stråling/varmestråling (Kirchoffs lov). [Dette er en følge av termodynamikkens 2. hovedsats.]

c) En klimagass er en gass som slipper igjennom stråling med frekvens (bølgelengder) i området der solstrålingen har sitt maksimum, dvs synlig lys, men som absorberer varmestrålingen fra jorda (typisk med bølgelengder i området 10–30 μm). De tre viktigste klimagassene er H_2O (vanndamp), CO_2 og CH_4 (metan).

d) I henhold til Stefan-Boltzmanns lov er varmestrålingen fra et legeme lik i alle retninger. I denne modellen har atmosfæren en felles temperatur, T_a, så strålingsintensiteten oppover og nedover er den samme, eller $E_t = E_a = \epsilon 4\pi R_J^2 \sigma T_a^4$. I forhold til a) ovenfor får vi et tillegg E_a til energibalansen ved bakken (husk $\epsilon = \alpha$):

$$\pi R_J^2 (1-A) S_0 + E_a = \pi R_J^2 (1-A) S_0 + \alpha 4\pi R_J^2 \sigma T_a^4 = E_b = 4\pi R_J^2 \alpha_J \sigma T_b^4\,,$$

Ved å forkorte med $4\pi R_J^4$, får vi det den første av de oppgitte ligningene.

For energibalansen i atmosfæren må vi ta hensyn til at denne stråler både oppover og nedover, og at bare en faktor α av strålingen fra bakken absorberes av atmosfæren.

$$\alpha_J E_b = E_t + E_a = 2E_a \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_J 4\pi\sigma R_J^2 T_b^4 = \alpha 8\pi\sigma R_J^2 T_a^4\,,$$

som ved forkorting gir den andre av de oppgitte ligningene.

e) Den siste av de oppgitte ligningene gir $T_a = (\alpha_J/2\alpha)^{1/4} T_b$, som ikke avhenger av S_0 . Innsatt i den første ligningen gir dette:

$$\frac{1}{4}(1-A)S_0 + \frac{1}{2}\alpha_J \sigma T_b^4 = \alpha_J \sigma T_b^4\,, \qquad \Longrightarrow \qquad T_b = \left(\frac{(1-A)S_0}{2\alpha_J \sigma}\right)^{1/4}\,.$$

Vi ser at dette er samme svar som i a). Den nødvendige verdien av α_J for $T = 288\,\mathrm{K}$ finner vi som:

$$\alpha_J = \frac{(1-A)S_0}{2\sigma T_b^4} = 1.2\,,$$

noe som er høyst ufysisk, siden vi må ha $\alpha_J \leq 1$. Denne enkleste versjonen av modellen er altså ikke god nok.

f) Hvis en andel $\beta = 0.20$ av solstrålingen blir absorbert i atmosfæren, vil den effektive solkonstanten på bakken bli $(1-\beta)(1-A)S_0$, og den første av ligningene i d) modifiseres til:

$$\frac{1}{4}(1-\beta)(1-A)S_0 + \alpha\sigma T_a^4 = \alpha_J \sigma T_b^4\,,$$

Denne energien blir i stedet absorbert av atmosfæren, så den andre ligningen i d) får et tillegg $\beta(1-A)S_0/4$. Dette gir:

$$\frac{1}{4}\beta(1-A)S_0 + \alpha_J \sigma T_b^4 = 2\alpha\sigma T_a^4 \,.$$

g) Setter vi inn $\alpha\sigma T_a^4$ fra den siste ligningen i forrige punkt inn i den første, finner vi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}(1-\beta)(1-A)S_0 + \left(\frac{1}{8}\beta(1-A)S_0 + \frac{1}{2}\alpha_J\sigma T_b^4\right) &= \alpha_J\sigma T_b^4 \,,\\
(2-\beta)(1-A)S_0 = 4\alpha_J\sigma T_b^4 \,,&\\
T_b = \left(\frac{(2-\beta)(1-A)S_0}{4\alpha_J\sigma}\right)^{1/4} &= 295\,\mathrm{K} = 22\,^\circ\mathrm{C} \,.
\end{aligned}$$

Dette reduserer seg til svaret i e) ovenfor når $\beta = 0$, som det må. Igjen har α falt ut av problemet. Vi ser at absorpsjon av solstråling *ikke* er en neglisjerbar effekt. Videre finner vi:

$$\begin{aligned}
T_a^4 &= \frac{1}{8\sigma}\frac{\beta}{\alpha}(1-A)S_0 + \frac{\alpha_J}{2\alpha}T_b^4\\
&= \frac{1}{8\sigma}\frac{\beta}{\alpha}(1-A)S_0 + \frac{\alpha_J}{2\alpha}\left(\frac{(2-\beta)(1-A)S_0}{4\alpha_J\sigma}\right) = \frac{(1-A)S_0}{4\alpha\sigma} \,.\\
T_a &= \left(\frac{(1-A)S_0}{4\alpha\sigma}\right)^{1/4} = 273\,\mathrm{K} = 0\,^\circ\mathrm{C} \,.
\end{aligned}$$

Vi ser at β dropper ut av uttrykket for atmosfæretemperaturen, og at svaret er det samme som i a), bortsett fra at jordoverflaten er erstattet med *atmosfæren*.