Stavanger, 23. august 1996

Øvingsoppgaver i fag TE 6272 Signalbehandling

Høgskolen i Stavanger
Institutt for elektroteknikk og databehandling

Oppgave 1

Bruk diskret foldning i de tre tilfellene vist i figur 1 til å finne responsen $y(n)$ til et inngangssignal $x(n)$ som påtrykkes et lineært, skift-invariant system med enhetspulsrespons $h(n)$.

Oppgave 2

$y(n)$ er responsen til inngangssignalet $x(n)$ påtrykt et lineært skift-invariant system med enhetspulsrespons $h(n)$. Vis at dersom $x(n)$ er en periodisk rekke med periode N, det vil si $x(n) = x(n + N)$, så er også $y(n)$ periodisk med periode N.

Oppgave 3

Enhets-puls responsen $h(n)$ til et lineært skift-invariant system er lik null utenfor intervallet $N_0 \leq n \leq N_1$.

Inngangssignalet $x(n)$ er null utenfor intervallet $N_2 \leq n \leq N_3$.

Utgangssignalet $y(n)$ blir da null utenfor intervallet $N_4 \leq n \leq N_5$.

Finn N_4 og N_5 uttrykt ved N_0, N_1, N_2 og N_3.

Oppgave 4

For hvert av de følgende system, bestem om systemet er (a) stabilt, (b) kausalt, (c) lineært:

1.

$$\mathrm{T}[x(n)] = g(n)x(n)$$

Sven Ole Aase

Førsteamanuensis, dr.ing.

Høgskolen i Stavanger

Institutt for elektroteknikk
og databehandling

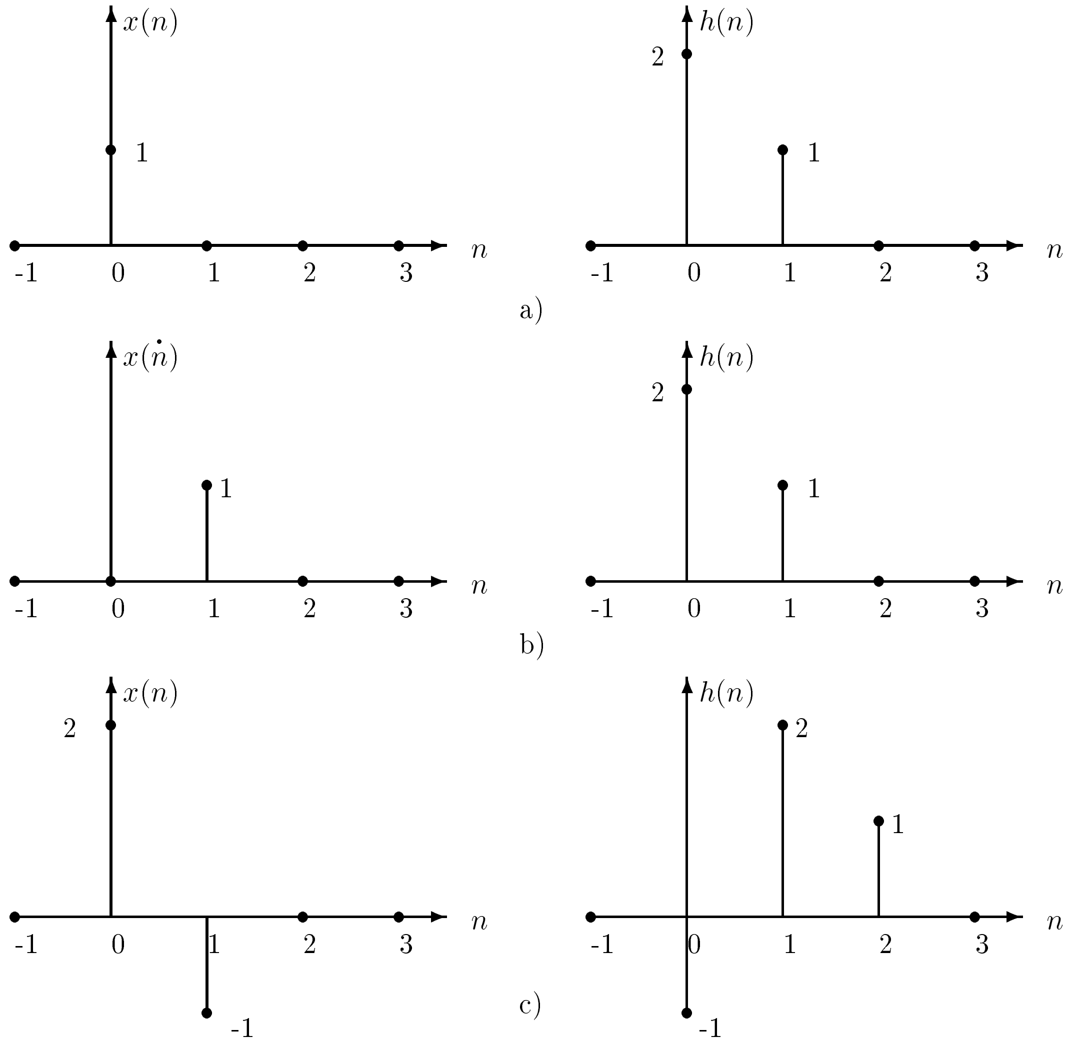
Postboks 2557 Ullandhaug

4004 Stavanger

Tel.: 51 83 20 09

Fax.: 51 83 17 50

E-mail: aase@hsr.no



Figur 1: Inngangssignaler og filterresponser.

2.

$$\mathrm{T}[x(n)] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$$

3.

$$\mathrm{T}[x(n)] = x(n - n_0)$$

4.

$$\mathrm{T}[x(n)] = e^{x(n)}$$

Oppgave 5

I denne oppgaven skal en gjøre seg kjent med programsystemet MATLAB. Start med å lese avsnittene 1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 17, 18 i "MATLAB Primer". Logg deg inn på én av våre arbeidsstasjoner og skriv "matlab" for å starte MATLAB programmet. Gjør endel av eksperimentene som er beskrevet i "primer'en" for å gjøre deg fortrolig med systmet. Ved behov senere kan du lese resten av dette dokumentet. Det er lurt allerede nå å gjøre seg fortrolig med "help".

Konvolusjon i MATLAB: En skal nå verifisere resultatene funnet i oppgave 1 ved hjelp av MATLAB. Som eksempel vises fremgangsmåten for deloppgave c: Dann signalene $x(n)$ og $h(n)$ som følger:

```
x=[0 2 -1 0 0]

h=[0 -1 2 1 0]
```

Dette her er, – jfr. fig. 1c, å tolke som $x(-1) = 0$, $x(0) = 2$, $x(1) = 1$, $x(2) = 0$, $x(3) = 0$, $h(-1) = 0$, $h(0) = -1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 1$ og $h(3) = 0$ selv om dette i MATLAB notasjon svarer til

```
h(1) = 0, h(2) = -1, h(3) = 2, h(4) = 1, h(5) = 0

x(1) = 0, x(2) = 2, x(3) = -1, x(4) = 0, x(5) = 0
```

fordi alle vektorer i MATLAB pr. definisjon har startindeks 1. Foldingen mellom $h(n)$ og $x(n)$ finnes nå ved

```
y = conv(x,h)
```

Ønsker du å plotte resultatet skriver du

```
stem(y)
```

Skulle du ønske å ha indeks aksen (n-aksen) i samsvar med riktig indeksering, som omtalt over, skriver du

```
stem([-1:1:7],y)
```

Er det en tilfeldighet at signalet $y(n)$ er antatt å ha lengde 9 i plottet generert over? Bruk samme fremgangsmåte som skissert over til å verifisere alle delspørsmålene i oppgave 1. Lag plott av resultatene og skriv kurvene ut til laserskriveren ved å skrive

```
print
```

umiddelbart etter at du har plottet et signal med "stem" kommandoen. Husk hele tiden at du kan bruke "help" for å få mer informasjon om de ulike kommandoene.

Oppgave 6

Fouriertransformasjonsparet for tidsdiskrete signaler er gitt ved

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{1}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega. \tag{2}$$

For et lineært, skift-invariant system er sammenhengen mellom inngangssignal $x(n)$, enhets-puls respons $h(n)$ og utgangssignal $y(n)$ gitt ved diskret foldning:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)$$

Ved hjelp av dette foldningsuttrykket, vis at sammenhengen mellom de Fourier-transformerte til henholdsvis $y(n)$, $h(n)$ og $x(n)$ er gitt ved

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

Oppgave 7

Et kausalt lineært skift-invariant system er gitt ved differanse-likninga

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) - bx(n-1)$$

Bestem b ($b \neq a$) slik at systemet blir et allpass-system, det vil si *tallverdien* til frekvensresponsen er konstant, uavhengig av frekvensen.

Tips: Finn $h(n)$ først. b og a er generelt *komplekse* tall.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad . \text{ Husk } b \neq a!$$

Oppgave 8

La $F\{x(n)\} = X(e^{j\omega})$, – vis at

a) $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$ når $x(n)$ er reell.

b) $Im(X(e^{j\omega})) = 0$ når $x(n)$ er både reell og symmetrisk, d.v.s $x(n) = x(-n)$.

c) $F\{e^{j\omega_0 n}x(n)\} = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$.

d) $F\{cos(\omega_0 n)x(n)\} = \frac{1}{2}(X(e^{j(\omega-\omega_0)}) + X(e^{j(\omega+\omega_0)}))$.

e) $F\{x(n)y(n)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\lambda})Y(e^{j(\omega-\lambda)})d\lambda$.

Oppgave 9

Filtrering i MATLAB: I denne oppgaven skal en beregne deler av enhetspuls-/sprang-responsen til et IIR filter med utgangspunkt i filterets differanseligning. Du vil her ha nytte av generere et enhetspulssignal:

```
imp=[1 zeros(1,99)]
```

(Her har en generert et signal med verdi 1 ved tidsindeks 0 (svarende til indeks 1 i MATLAB) og 99 etterfølgende nuller. For indekser som *imp* ikke er definert for, iflg. MATLAB kommandoen gitt over, forutsetter vil signalverdier lik null.) Du vil også få behov for å lage deg et enhetssprangsignal:

```
sprang=ones(1,100)
```

I tillegg vil du kunne gjøre deg nytte av kommandoen *filter*, – sjekk bruken av denne ved å skrive (Vær forsiktig, husk at A-vektoren *må* inneholde $a(1)$, koeffisienten foran $y(n)$, som er 1.):

```
help filter
```

Gitt differanseligningen

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) \tag{3}$$

der $a_1 = -0.8$, $a_2 = 0.64$ og $b_0 = 0.866$.

a) Finn og plott enhetspulsresponsen, $h(n)$, for det gitte systemet for $0 \leq n \leq 49$.

b) Plott sprangresponsen til systemet gitt ovenfor for $0 \leq n \leq 49$. (Vi antar at systemet er relaksert, - merk at dette passer godt overens med "default" verdiene i *filter* kommandoen.)

c) Definer et FIR system med impulsrespons gitt av

$$h_{FIR}(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leq n \leq 19 \\ 0, & ellers. \end{cases} \tag{4}$$

hvor $h(n)$ er enheltspulsresponsen som vi plottet i deloppgave a. Finn og plott enhetssprangresponsen for dette systemet for $0 \leq n \leq 49$. Sammenlign med b).

Oppgave 10

Signalet $x(n) = cos(\omega n)$ påtrykkes, ved tiden $n = 0$, et lineært tidsinvariant system med enhetspulsrespons

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \qquad (a \in \mathbf{R}, 0 < a < 1) \\ 0, & ellers. \end{cases} \tag{5}$$

I forelesningene fant vi at $H(e^{j\omega}) =\mid H(e^{j\omega}) \mid e^{j\theta(\omega)}$, der

$$\mid H(e^{j\omega}) \mid = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2acos\omega}}, \qquad \theta(\omega) = \arctan\{\frac{-a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}\}. \tag{6}$$

Finn responsen for systemet med det gitte påtrykk *i tidsplanet* og drøft de ulike leddene i uttrykket for $y(n)$.

Oppgave 11

Gitt et FIR filter med enhetspulsrespons:

$$h(n) = \begin{cases} 1/M, & 0 \leq n \leq M - 1 \\ 0, & ellers. \end{cases} \tag{7}$$

Finn z-transformen (d.v.s. systemfunksjonen) til dette filteret. Finn frekvensresponsen og plott amplitude og faserespons, for $M = 5$. Vil du karakterisere dette som et lavpass, høypass eller båndpass filter? Går det, med utgangspunkt i den systemfunksjonen du fant, an å betrakte dette FIR-filteret som et rekursivt filter? Hvordan blir i så fall differenseligningen?

Oppgave 12

$X(z)$ er $\mathcal{Z}$-transformen til $x(n)$. Vis at nedenstående gjelder og kommenter spesielt på hvordan konvergensområdene (R.O.C.) endrerer seg i forhold til konvergensområdet for $X(z)$:

a) $z^{n_0}X(z)$ er $\mathcal{Z}$-transformen til $x(n+n_0)$.

b) $X(a^{-1}z)$ er $\mathcal{Z}$-transformen til $a^n x(n)$.

c) $X(z^{-1})$ er $\mathcal{Z}$-transformen til $x(-n)$.

d) $-z\frac{d}{dz}(X(z))$ er $\mathcal{Z}$-transformen til $n \cdot x(n)$.

e) $X(\frac{1}{z})$ er $\mathcal{Z}$-transformen til $x(-n)$.

Oppgave 13

Den deterministiske autokorrelasjonen, $r_{xx}(n)$, til $x(n)$ er definert ved

$$r_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(n+k)$$

Finn den $\mathcal{Z}$-transformerte til $r_{xx}(n)$ uttrykt ved den $\mathcal{Z}$-transformerte til $x(n)$.

Oppgave 14

Gitt et FIR-filter med enhetspulsrespons $h(n)$ av lengde $2N+1$. $h(n)$ er en reell og like følge (d.v.s. $h(n) = h(-n)$).

a) Vis at nullpunktene til overføringsfunksjonen $H(z)$ opptrer som speilbilde-par omkring enhetssirkelen, det vil si hvis $z = pe^{j\theta}$ er et nullpunkt så er også $z = \frac{1}{p}e^{j\theta}$ et nullpunkt. Finn også frekvensresponsen. Hva er faseresponsen?

b) La $h_k(n)$ være et *kausalt* filter enhetspulsrespons ulik null for $n = 0, \ldots, 2N$ og med like symmetri, $h_k(n) = h_k(2N-n)$. Finn frekvensresponsen og forklar hovedforskjeller i forhold til frekvensresponsen for filteret i a) oppgaven. Kommentér spesielt faseresponsen.

Oppgave 15

Gitt et lineært skift-invariant system med enhetspulsrespons $h(n)$, og inngangssignal $x(n)$.

$$h(n) = \begin{cases} a^n & , \quad n \geq 0 \quad , \quad 0 < a < 1 \\ 0 & , \quad n < 0 \end{cases}$$

$$x(n) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq n \leq (N-1) \\ 0 & \quad \text{ellers} \end{cases}$$

a) Finn utgangssignalet $y(n)$ ved *direkte* å bruke uttrykket for diskret foldning.

b) Bestem $y(n)$ ved først å finne $\mathcal{Z}$-transformen for henholdsvis $h(n)$ og $x(n)$, og deretter ta den inverse $\mathcal{Z}$-transformen til produktet av $H(z)$ og $X(z)$. (Det er ikke sikkert at rett-frem-etter-nesen-metoden er den beste her)

Oppgave 16

Filter-responser i MATLAB: I denne oppgaven skal en bruke MATLAB til å plotte frekvens- og fase-responser for digitale filtre. En skal også lære enkel FIR-filterkonstruksjon.

Gjør deg kjent med kommandoen *freqz* ved å skrive

```
help freqz
```

Lag deg nå to såkalte "funksjons m-filer", – se s. 8 i "MATLAB primer", én som plotter ut fase- og én som plotter frekvens-respons for et filter med spesifisert systemfunksjon (z-transform av enhetspulsresponsen).

Bruk denne m-filen (matlab-funksjonen) til å plotte amplituderesponsen for filteret fra oppgave 2 når $M = 16$. Konstruér et FIR filter ved help

```
h=fir1(15,0.05)
```

Her betyr tallet 15 av det skal være et 15-de ordens FIR filter, – d.v.s. et filter med 16 koeffisienter. Tallet 0.05 betyr at ønsket knekkfrekvens er 0.05π. Sjekk "help" funksjonen for *fir1*. Plott amplituderesponsen for dette filtret. Begge filterene er å betrakte som lavpass filtre. Hva er forskjellene i amplituderespons og enhetspulsrespons?

Oppgave 17

Et kausalt, lineært og skift-invariant system har en overføringsfunksjon

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{a}z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad , \quad \text{hvor } a \text{ er reell.}$$

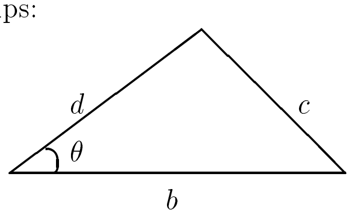
a) Hvilke verdier av a gjør systemet stabilt?

b) For $0 < a < 1$, tegn pol-nullpunkt diagrammet, og avmerk konvergensområdet (ROC).

c) Vis grafisk i $\mathcal{Z}$-planet at systemet er et allpass-system, det vil si at $|H(z)|$ er konstant på enhetssirkelen.

d) Vis det samme matematisk i frekvensplanet, det vil si $|H(\omega)|$ er konstant for alle $\theta \in [0, 2\pi\rangle$.

Tips:



$$c^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos\theta$$

Oppgave 18

Rekka $x(n)$ er utgangssignalet av et lineært skift-invariant system med inngangs-signalet $s(n)$. Systemet er gitt ved differanselikninga

$$x(n) = s(n) - e^{-8\alpha}s(n-8) \quad , \quad \text{hvor } \alpha > 0$$

a) Finn overføringsfunksjonen $H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)}$, og tegn pol-nullpunkt diagrammet i $\mathcal{Z}$-planet. Angi konvergensområdet.

b) Vi ønsker nå å gjenvinne $s(n)$ fra $x(n)$ ved hjelp av et lineært skiftinvariant system.

Finn systemfunksjonen

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

slik at $y(n) = s(n)$. Finn alle konvergensområder for $H_2(z)$, og undersøk i hvert tilfelle om systemet er kausalt og stabilt.

c) Finn $h_2(n)$ når systemet er kausalt og stabilt.

Oppgave 19

Gitt $\mathcal{Z}$-transformen

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{(1-2z^{-1})(3-z^{-1})} \tag{8}$$

a) Tegn pol-/nullpunkt-diagram for $\mathcal{Z}$-transformen.

b) Identifiser mulige konvergensområder, og identifiser om de tilhørende signaler i tidsplanet er kausale, anit-kausale eller to-sidige. Hvilket konvergensområde svarer til et stabilt signal $x(n)$?

c) Bestem $x(n)$ for hvert av konvergensområdene identifisert over.

Oppgave 20

Finn signalet $x(n)$ hvis $\mathcal{Z}$-transform er

$$X(z) = e^z + e^{1/z} \qquad |\, z \,| \neq 0 \tag{9}$$

Oppgave 21

MATLAB-oppgave: Poler og nullpunkter. I denne oppgaven skal en se på poler og nullpunkter for et IIR og et FIR filter som først skal konstrueres.

Konstruér ett FIR filter og ett IIR filter med knekkfrekvens $\pi/2$ som følger:

```
h=fir1(15,0.5)
[b,a]=butter(3,0.5)
```

Verifiser at dette er lavpassfiltre ved å plotte amplituderesponsen for de to filtrene, – bruk m-funksjonen som du (eller en du kjenner) skrev i forbindelse med øving 3.

Finn poler og nullpunkter for IIR filtret og plott dem i det komplekse planet (du vil kunne få bruk for kommandoene roots, polar, angle, abs). Juster de to kompleks konjugerte polene slik at deres vinkel i forhold til real-aksen er $\pi/4$. (Endre på polene og finn systemfunksjonens nye nevnerpolynom ved bruk av kommandoen *poly*). Plott amplituderesponsen nå (justér eventuelt slik at responsen ved $\omega = 0$ fremdeles blir lik 1) og forklar forskjellen i forhold til den opprinnelige amplituderesponsen.

Plott nullpunktene for FIR filteret. Klarer du å forklare hvordan de ulike nullene bidrar til å forme amplituderesponsen til filteret?

Oppgave 22

a) Gitt systemfunksjonen

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}, \qquad | z |> \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Finn inverstransformen, – d.v.s. $h(n)$. (Husk at multiplikasjon av $\mathcal{Z}$-transformer svarer til konvolusjon i tidsplanet.)

b) Gitt systemfunksjonen

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}, \qquad | z |> \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Finn inverstransformen, – d.v.s. $h(n)$, også i dette tilfellet. (Du kan få nytte av resultatet fra forrige deloppgave.

Oppgave 23

En har gitt et FIR system med følgende systemfunksjon

$$H(z) = (1-0.8e^{j\pi/2}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/2}z^{-1})(1-1.5e^{j\pi/4}z^{-1})(1-1.5e^{-j\pi/4}z^{-1}). \tag{12}$$

a) Finn alle systemer *med reelle koeffisienter* som har samme amplituderespons som systemet gitt over. Identifisér minimum- og maksimum- fase systemet.

b) Skriv ut systemfunksjonene over som polynomer av z^{-1} (hvis du ikke allerede har gjort det). Finn enhetspulsresponsene til systemene.

c) Beregn og plott partiell energi, $E(n) = \sum_{k=0}^{n} h^2(n)$, for systemene over. Er din tidligere identifikasjon av minimum- og maksimum-fase systemer konsistent med disse plottene?

d) $H(z)$ som gitt innledningsvis er et blandet fase system. Skriv dette som et produkt av et minimum fase filter og et annet filter. Hva slag filter er dette andre filteret? Begrunn! (Du kan ha nytte av å lese side 362 i læreboka.)

Oppgave 24

Invers filtrering i MATLAB: I denne oppgaven skal du få en forståelse for hvorfor det er lurt å gjore bruk av minimum-fase filter når en ønsker å foreta invers filtrering.

Gitt filtrene

$$H_0(z) = 1 - 2.1213z^{-1} + 2.89z^{-2} - 1.3576z^{-3} + 1.44z^{-4} \tag{13}$$

$$H_1(z) = 2.25 - 2.1213z^{-1} + 2.44z^{-2} - 1.3576z^{-3} + 0.64z^{-4} \tag{14}$$

$$H_2(z) = 0.64 - 1.3576z^{-1} + 2.44z^{-2} - 2.1213z^{-3} + 2.25z^{-4} \tag{15}$$

Hvilke har stabil/ustabil invers?

Lag deg et signal som følger:

```
x= sin(0.4*pi*[0:200]) + sin(0.7*pi*[0:200])
```

Filtrer dette med filtrene gitt ovenfor (bruk filter-kommandoen). Foreta så inversfiltrering for de tre tilfellene og plott de tre inversfiltrerte signalene. Er det noen forskjell på det du fikk når inversfilteret var stabilt/ustabilt?

Lag det et støysignal som følger:

```
n=0.00001*rand(0:200)
```

Addér dette til de filtrerte signalene funnet ved "foroverfiltrering" over. Istedenfor å inversfiltrere rene foroverfiltrerte signaler, foreta inversfiltrering av de støybeheftede signalene. Er det forskjell på det du fikk ved inversfiltrering nå og det du fikk før du la på støy? Er det lurt å bruke minimum fase filtre når en skal foreta inversfiltrering?

Oppgave 25

Oppgave 5.24 i Proakis og Manolakis.

Oppgave 26

Oppgave 5.25 i Proakis og Manolakis.

Oppgave 27

Oppgave 5.13 i Proakis og Manolakis.

Oppgave 28

La $x(n)$ være et signal med lengde N sampler og med N-punkts DFT $X(k)$. $x(n)$ "paddes" med L nuller og vi beregner $(N+L)$-punkts DFT'en, $X'(k)$. Hva er sammenhengen mellom $X(0)$ og $X'(0)$? Kan du se noen sammenheng dersom vi plotter $|X(k)|$ og $|X'(k)|$ i samme koordinatsystem?

Oppgave 29

Oppgave 5.28 i Proakis og Manolakis (bruk MATLAB).

Oppgave 30

Oppgave 5.29 i Proakis og Manolakis (bruk MATLAB).

Oppgave 31

Gitt to diskrete firkantpulser

$$x_1(n) = x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

a) $x_3(n)$ er gitt som den sirkulære foldningen av $x_1(n)$ og $x_2(n)$. Finn et uttrykk for $x_3(n)$.

b) Sett $N = 7$, og skissér $x_1(n)$, $x_2(n)$ og $x_3(n)$.

Oppgave 32

Den diskrete Fouriertransformasjonen av et signal $x(n)$ er gitt ved

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad ; \quad k = 0, ..., N-1 \tag{16}$$

a) Forklar hvilke tolkninger vi kan gi dette uttrykket.

b) Hva er *Zero-Padding*, og hvorfor brukes dette? Illustrer!

Oppgave 33

Vis følgende :

a) Parsevals sats for DFT:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

b) Frekvensskift :

$$x(n)e^{\frac{j2\pi nl}{N}} \leftrightarrow X((k-l)\mathrm{mod}N)(= X((k-l))_N)$$

c) Multiplikasjon i tid:

$$y(n)x(n) \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} Y(l)X((k-l))_N$$

Oppgave 34

a) $x(n)$ er reell. Vis at $X(N-k) = X^*(k)$.

b) $x(n)$ er reell og like, d.v.s. $x(n) = x((-n))_N$. Finn forenklede uttrykk for DFT og IDFT i dette tilfellet.

Oppgave 35

Filtrering med DFT i MATLAB: Lag signalene

$$x(n) = \{1, 2, 5, 1, 3, 6, 7\} \tag{17}$$

$$h_0(n) = \{1, 1\} \tag{18}$$

$$h_1(n) = \{1, 1, 1\} \tag{19}$$

i MATLAB.

a) Finn $h_0(n) * x(n)$ og $h_1(n) * x(n)$ ved bruk av kommandoen *conv*.

b) Bruk 7-punks DFT og invers DFT til å finne sirkulærkonvolusjonen mellom $x(n)$ og $h_0(n)$ og $h_1(n)$ (Foreta nødvendig null-padding av $h_0(n)$ og $h_1(n)$ før du bruker 7-punkts DFT. De aktuelle kommandoene i MATLAB er *fft* og *ifft*).

c) Bruk 8, 9 og 10 punkts DFT'er på null-paddete signaler til å beregne sirkulær sirkulærkonvolusjonene i forrige deloppgave. Når er sirkulærkonvolusjonene beregnet via DFT lik lineær konvolusjonene som funnet i deloppgave a. Stemmer forøvrig resultatene med teorien i uttdelt notat om sirkulær og lineær konvolusjon?

Oppgave 36

FFT - *Fast Fourier Transform* - er en rask algoritme (egentlig flere ulike algoritmer) for å beregne DFT av en sekvens. Dette oppnås ved å dekomponere ligningen som definerer DFT på spesielle måter.

a) Forklar prinsippet bak *desimering i tid*-FFT. Hvordan forandrer beregningskompleksiteten seg, og hvorfor oppnås dette resultatet?

b) Hvordan kan vi beregne DFT for to reelle signal ved hjelp av én kompleks DFT?

Oppgave 37 (Frivillig)

En skal bruke en 8-punkts FFT med radix 2, bygd på prinsippet desimering i ti d.

a) Sett opp det matematiske uttrykket for samtlige mellomresultater.

b) Finn DFT til sekvensen $x(n) = \{00111100\}$.

c) Finn antall addisjoner og multiplikasjoner brukt i punkt b).

d) Hvordan er sammenhengen mellom $X(1)$ og $X(7)$, $X(2)$ og $X(6)$, $X(3)$ og $X(5)$? Kunne man visst dette på forhånd?

e) Finn en DFT til sekvensen $y(n) = \{11000011\}$ på enklest mulig måte.

Oppgave 38

Oppgave 3.2 i kapittel om stokastiske prosesser.

Oppgave 39

Oppgave 3.9 i kapittel om stokastiske prosesser.

Oppgave 40

Stokastiske signaler i MATLAB: I MATLAB kan du lage realiseringer av stokastiske signaler ved hjelp av kommandoen *randn* (du får da gaussisk fordelte signalsampler som er så ukorrelerte som "randomgeneratoren" får til). Bruk *help* til å finne ut hvordan denne brukes. Lage en realisering av en hvit gaussisk stokastisk prosess ved å skrive

```
x = randn(1,1024)
```

Plott signalet. Synes du dette ser tilfeldig ut?. Finn og plott (et estimat av) autokorrelasjonsfunksjonen ved bruk av *xcorr* (plott bare den sentrale delen av autokorrelasjonen, normaliser den først ved å dividere alle samplene med maximalverdien av det du får ut av *xcorr*). Tyder autokorrelasjonsestimatet på at dette faktisk er en hvit prosess?

Lag deg to filtre, ett med knekkfrekvens $\pi/2$ og ett med knekkfrekvens $\pi/4$ ved help av kommandoen *fir1* (husk at dette i MATLAB terminologi svarer til frekvensene 0.5 og 0.25). Bruk orden 15 på filtrene du konstruerer. Filtrer signalet som du har generert over med disse to filtrene og plott de første 100 samplene av inngangssignal og de to filtrerte signalene. Hvilke synes å være mest "tilfeldige"? Finn og plott normaliserte autokorrelasjonsestimat. Hva er forskjellen i autokorrelasjoner i de tre tilfellene?

Lag deg et plott av et grovt estimat av effektspektraltettheten til de 3 stokastiske signalene over ved å skrive:

```
semilogy( abs(fft(rxx)) )
```

(rxx er autokorrelasjonsestimatet til inngangssignalet som funnet over) og tilsvarende for de filtrerte signalene. Er resultatene som du hadde forventet?

Oppgave 41

Oppgave 3.10 i kapittel om stokastiske prosesser. I tillegg til å finne autokorrelasjonsfunksjonen ved invers fourier transform, – beregne den også direkte: $r_{yy}(m) = E\{y(n)y(n+m)\}$ hvor y'ene er gitt ved differenseligningen til systemet. (I figuren betyr D det samme som z^{-1}).

Oppgave 42

Vi har i forelesningene snakket om at en kan representere stasjonære stokastiske prosesser ved en hvit prosess og et filter. Prosessen vi ønsker å representere på dette viset kan da betraktes som utgangssignalet når den hvite prosessen påtrykkes filteret. Nedenunder er gitt fire ulike filtre som sammen med en hvit prosess med varians lik 1 (d.v.s $E(w^2(n)) = \sigma_w^2 = 1$) representerer fire ulike stokastiske prosesser (i alle tilfellene er $x(n)$ den stokastiske prosessen og $w(n)$ er den hvite prosessen):

1. $x(n) = -0.9x(n-1) + w(n)$

2. $x(n) = 0.9x(n-1) + w(n) + w(n-1)$
3. $x(n) = w(n) + 2w(n-1) + w(n-2)$
4. $x(n) = -0.81x(n-2) + w(n)$

a) For hvert av tilfellene over, finn den $H(z)$ svarende til filtereret i representasjonen av den stokastiske prosessen. Hvilke representasjoner svarer til ARMA, AR, MA modell?

b) Finn effektspekteret $S_{xx}(e^{j\omega})$ for de fire stokastiske prosessene.

c) Plott effektspektraene (bruk gjerne MATLAB). Normalisér plottene slik at de hensiktsmessig kan plottes i samme aksekors. Hvordan vil du beskrive/karakterisere de ulike effektspektraene?

Oppgave 43

For ergodiske, stasjonære stokastiske prosesser har vi at en kan erstatte statistiske middelverdier med tidsmidler beregenet ut fra en enkelt realisering av prosessen. Når det gjelder autokorrelasjonsfunksjonen har vi lansert

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+m) \tag{20}$$

som en måte å estimerer denne på med utgangspunkt i én realisering av den stokastiske prosessen. N er en parameter som bestemmer hvor mange av signalsamplene vi skal la inngå i beregningen av estimatet. Anta at vi skal estimere autokorrelasjonen ut fra N signalsampler. Anta videre at vi *ikke* har tilgang til flere signalsampler enn disse. En vil da ofte anta at signalet $x(n)$ har verdien 0 utenfor intervallet $0, \ldots, N-1$. Hvis denne antakelsen aksepteres, forklar hvorfor det er rimelig å bytte ut formelen over med

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-1-m} x(n)x(n+m) \tag{21}$$

Oppgave 44

Anta at en stokastisk prosess $x(n)$ er genereret ved en første ordens AR modell

$$x(n) = ax(n-1) + w(n) \tag{22}$$

der $w(n)$ er hvit støy.

a) Finn støyvariansen, σ_w^2 og a uttrykt ved hjelp av autokorrelasjonsfunksjonen. (Hint: Dette er egentlig samme type utledning som vi har gjennomført i forelesningene, – bare at situasjonen her er noe forenklet).

b) Den lineære prediktoren av første orden for en stokastisk prosess kan skrives $\hat{x}(n) = hx(n-1)$. Anta at prosessen som ønskes prediktert er en første ordens AR prosess som gitt ved ligning 22 . Finn den h som minimaliserer $E[(\hat{x}(n) - x(n))^2]$. Kommentér!

Oppgave 45

Estimering av AR parametre i MATLAB: En skal her ta for seg estimering av parametre i en første ordens AR prosess.

a) Anta at en har en realisering av et signal generert i samsvar med

$$x(n) = ax(n-1) + w(n). \tag{23}$$

Sett opp Yule-Walker ligingene som setter oss i stand til å finne a og σ_w^2 når vi kan estimere autokorrelasjonen ut fra realiseringen. (Kan du gjøre bruk av resultatet i oppgave 3a?)

b) Nedenunder er gitt et kort MATLAB program. Forklar kort hva det gjør og kjør det med ulike valg av a og $sigma$.

```
function [a_est,sigma_est] = ar1(a,sigma)

x1=randn(1,100)*sigma;
y1=filter(1,[1 -a],x1);

rxx1=xcorr(y1,y1,'unbiased');

r0=rxx1(100);
r1=rxx1(101);


a_est=r1/r0;
sigma_est=sqrt((r0^2-r1^2)/r0);
```

Oppgave 46

Oppgave 11.2 i Proakis og Manolakis.

Oppgave 47

Gitt et signal $s(n)$ som kan modelleres som en AR(1) prosess ifølge ligningen

$$s(n) = 0.8s(n-1) + v(n). \tag{24}$$

En kunne for eksempel tenke seg at dette var en gyldig modell for en del av et talesignal. $v(n)$ er en innovasjonsprosess med $\sigma_v^2 = 0.49$. Dette signalet degraderes av hvit støy med varians $\sigma_w^2 = 1$. D.v.s. vi kan ikke observere det ønskede signalet $s(n)$, men kun det degraderte signalet $x(n) = s(n) + w(n)$. De stokastiske prosessene $w(n)$ og $v(n)$ er ukorrelerte, d.v.s $r_{vw}(m) = E\{v(n)w(n+m)\} = 0$ for alle m.

a) Finn autokorrelasjonene $r_{ss}(m)$ og $r_{xx}(m)$.

b) En skal bruke et Wienerfilter til å estimere signalet $s(n)$. D.v.s. vi skal gjøre bruk av et filter, $h(n)$, som anvendt på $x(n)$ gjør at signalet ut av dette filteret, $y(n)$, ligner mest mulig på signalet $s(n)$. Med "ligne på" mener vi her at $E\{(y(n) - s(n))^2\}$ skal være minst mulig. Minimalisering av dette uttrykket med hensyn på filterkoeffisientene gir opphav til de såkalte Wiener-Hopf ligningene. Utled disse ligningene for det tilfellet at en ønsker å bruke et FIR Wiener filter med 2 koeffisienter. Finn filter koeffisientene.

c) Hva blir mimimumverdien av $E\{(y(n) - s(n))^2\}$?

d) Simulér oppsettet beskrevet over i MATLAB ved å generere de ulike signalene som nevnt over. Estimér de autokorrelasjoner som er nødvendige ut fra de genererte signalene. Bruk disse estimatene når du skal løse Wiener-Hopf ligningene. Er det overensstemmelse mellom teori og praksis?

Oppgave 48

Prediksjonsorden i MATLAB: Vi skal her se på valg av prediksjonsorden når en ønsker å foreta optimal prediksjon av et signal. Signalet som en ønsker å prediktere skal en anta er en realisering av en AR prosess med spesifisert orden, spesifiserte koeffisienter og med $\sigma_w^2 = 1$.

Kopier over filene ov10.m, ov10gen.m og ov10est.m fra directoriet

```
/home/elektro/aase/dsp/matlab
```

inn på din egen bruker på Unix anlegget. Du trenger alle tre m-filene, men skal bare bruke ov10.m, som i sin tur kaller opp ov10gen og ov10est ved behov. Anta at du i MATLAB kaller ov10 som følger:

```
a=[0.9 -0.6 0.4 0.2];
mseest=ov10(a,1,6,5)
```

Det som nå skjer er at du genererer en 4-ordens AR-prosess med filterparametre $a_1 = 0.9, a_2 = -0.6, a_3 = 0.4, a_4 = 0.2$. Så prøver vi å estimere optimale prediktorer for denne 4-ordens prosessen ut fra 5 separate realiseringer. Med kommandoen som gitt over vil en finne optimale 1-ordens, 2-ordens o.s.v. opp til 6-ordens prediktorer.

Skriv 'help ov10' for mer informasjon om kommandoen. Når du kjører kommandoen som spesifisert ovenfor vil du få skrevet ut estimerte prediksjonskoeffisienter samt at du vil få skrevet ut midlere kvadratisk avvik mellom signalet og prediktert signal for de 5 realiseringene (én rad for hver realisering i *mseest*) for 1. t.o.m 6. ordens prediktorer. Gjør dette eksperimentet og plott midlere kvadratisk prediksjonsfeil som funksjon av prediktorordenen. Er det noen vits i å bruke større prediktororden enn 4? Prøv å eksperimentere med andre AR-prosesser. Klarer algoritmen å estimere fornuftige prediktorkoeffisienter?

Oppgave 49

a) Hva innebærer det at et filter har lineær fase? Prøv å skissere virkningen av dette for tre sinuskomponenter (f.eks. ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$).

b) Vis at et FIR-filter har lineær fase dersom enhetspulsen er symmetrisk eller antisymmetrisk ($h(n) = \pm h(N-1-n)$).

Oppgave 50

a) Vindusdesign av FIR-filtre går ut på at en lager et filter hvor enhetspulsresponsen er lik den man ideellt ønsker, multiplisert med en *vindusfunksjon* $w(n)$ av lengde N =FIR-filterets orden:

$$h_{designet}(n) = h_{ideell}(n) \cdot w(n)$$

1. Hvilket vindu minimerer midlere kvadratisk avvik mellom $h_{designet}(n)$ og $h_{ideell}(n)$?
2. Hvorfor må ofte andre vinduer benyttes?

c) La $w(n)$ være en vindusfunksjon med frekvensinnhold

$$W(\omega) = \sum_{n=-M}^{M} w(n)e^{-j\omega n} \quad , \quad \text{der } w(n) = w(-n) \quad \text{(symmetri)}$$

1. Vis at funksjonen

$$w_{B1}(n) = w(n)\cos(n\omega_0) \quad ; \quad 0 \le \omega_0 \le \pi$$

har et frekvensinnhold

$$W_{B1}(\omega;\omega_0) = \frac{1}{2}\{W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + W(e^{j(\omega+\omega_0)})\}$$

2. La nå $w(n) = -w(-n)$ (antisymmetri). Vis at

$$w_{B2}(n) = w(n)\sin(n\omega_0) \quad ; \quad 0 \le \omega_0 \le \pi$$

gir

$$W_{B2}(\omega;\omega_0) = \frac{j}{2}\{W(e^{j(\omega-\omega_0)}) - W(e^{j(\omega+\omega_0)})\}$$

3. Hvordan kan resultatene fra 1. og 2. brukes i FIR-filter-konstruksjon?

Oppgave 51

a) Forklar gangen i konstruksjon av IIR filtre ved bruk av bilineær transformasjon.

b) En ønsker å konstruere et digitalt lavpass filter med knekkfrekvens svarende til 50 Hz. Samplingsfrekvensen til signalet som filtreres er 500 Hz. Med knekkfrekvensen vil en her mene den frekvensen hvor $|H(e^{j\omega})| = 1/\sqrt{2}$ idet vi forutsetter at amplituderesponsen i passbåndet er lik 1. Hvilken knekkfrekvens, Ω_c, må vi velge for det analoge filteret?

c) Det analoge fileret vi skal ta utgangspunkt i er et såkalt normalisert annen ordens Butterworth filter

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}. \tag{25}$$

Frekvensresponsen finnes ved å sette $s = j\Omega$. Vis at knekkfrekvensen til dette analoge filteret er 1 rad/sek. For å få andre knekkfrekvenser kan vi erstatte s med ks. Finn den H(s) som vi må ta utgangspunkt i når vi skal foreta substitusjonen $s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

d) Hva blir den resulterende $H(z)$. Plott amplituderesponsen (gjerne ved bruk av MATLAB).

Oppgave 52

Et tidsdiskret, lineært og kausalt system er gitt ved differanselikningen

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

Tegn filteret som gir differanselikningen på hver av de følgende måter:

1. Direkte form I
2. Direkte form II
3. Kaskade
4. Parallell

I punkt 3. og 4. skal du bare bruke første-ordens seksjoner.

Oppgave 53

Toer-komplement representasjon fører til attraktive forenklinger av aritmetriske prosesser. En skal her se nærmere på addisjon.

Tallet x har toer-komplement representasjon:

$$\begin{array}{ll} |x| & , \quad x \geq 0 \\ 2 - |x| & , \quad x < 0 \end{array}$$

hvor $|x| < 1$ og x blir representert ved $(b + 1)$ bit.

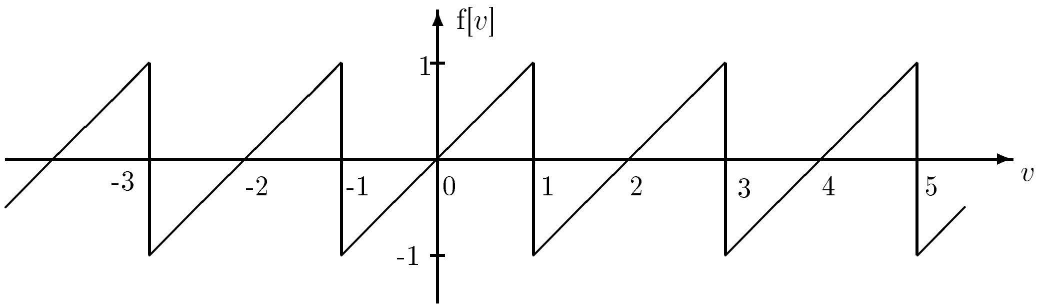
Addisjon blir utført som følger:

1. Alle tall blir behandlet som $(b + 1)$ binære tall *uten* fortegn.
2. Addisjon er enkel binær addisjon.
3. Er summen større enn 2, ignoreres mente (carry).

a) Bruk det ovenstående til å skrive generelle uttrykk for addisjon av to tall x_1 og x_2 hvor både $|x_1|$ og $|x_2| < 1$. Ta i betraktning alle mulige tilfeller, det vil si x_1 og/eller x_2 kan være negativ og $|x_1|$ større eller mindre enn $|x_2|$.

b) Når x_1 og x_2 har samme fortegn kan overløp inntreffe (tallverdi av summen er større enn 1). Vis at i tilfelle overløp får summen motsatt fortegn av x_1 og x_2.

c) Vis at addisjon i toer-komplement kan beskrives grafisk som vist under hvor $f[x_1 + x_2]$ representerer summen.



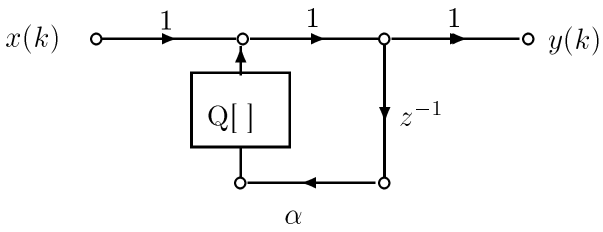
d) Anta $x_1 = \frac{5}{8}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$

Finn toer-komplement representasjonen av hvert tall. Finn summen ved først å addere x_1 og x_2, deretter $(x_1 + x_2) + x_3$.

Legg merke til at en får overløp i den første addisjonen, mens sluttresultatet blir korrekt. Vis at overløp i en addisjonsprosess ikke vil influere på sluttsummen så lenge denne har tallverdi mindre enn 1.

Oppgave 54

Gitt et første ordens filter som vist under:



Kvantiseringen Q[ ] står for at resultatet av multiplikasjonen med α er blitt avrundet. Alle tall har fast komma representasjon og ordlengde b bit (foruten fortegnsbit).

Inngangssignalet er *null*, men filteret er startet med initialverdien A på *utgangen*.

På grunn av kvantiseringen er det et område av verdien på A (*dødbånd*), hvor den *effektive* verdien av koeffisienten α er $+1$ eller -1, det vil si $|\mathrm{Q}[\alpha A]| = A$.

Når først utgangssignalet kommer inn i dette området vil det enten *oscillere* eller være *konstant*, avhengig av om effektiv verdi på α er $+1$ eller -1.

a) Finn dødbåndet uttrykt ved α og b.

b) Med $b = 6$ bit og $A = \frac{1}{16}$, skissér $y(n)$ for $\alpha = +\frac{15}{16}$ og $\alpha = -\frac{15}{16}$.

c) med $b = 6$ bit og $A = \frac{1}{5}$, skissér $y(n)$ for $\alpha = -\frac{15}{16}$.

Oppgave 55

Oppgave 7.52 i Proakis og Manolakis.

Oppgave 56

Oppgave 7.53 i Proakis og Manolakis.