HØGSKOLEN I STAVANGER

Institutt for elektroteknikk og databehandling

Stavanger, 9. mai 1995

4542 Informasjonsteori og feilkorrigerende koding: Øving 6

Oppgave 1

En diskret hukommelsesfri kanal er karakterisert ved kanalmatrisen (elementene i matrisen er de betingede sannsynlighetene $P(y_j \mid x_i)$; i'en refererer seg til *radnummer* og j'en til *kolonnenummer*):

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Hvis $P(x_1) = \frac{1}{2}$ og $P(x_2) = P(x_3) = \frac{1}{4}$, finn *betinget maksimum sannsynlighet* desisjonsregel og finn den assosierte feilsannsynligheten, $P_E = P(\text{'Feil dekoding'})$.

Oppgave 2

a) Finn kanalmatrisen for kanalen i nedenstående figur. Hva slags kanal er dette?

b) Vis at $H(Y|X)$ er uavhengig av a priori sannsynlighetene.

c) Vis at for en generell uniform kanal vil identiske a priori sannsynligheter medføre identiske utgangssannsynligheter $P(y_j)$.

d) Finn kanalkapasiteten for kanalen.

e) Hvis $W_1 = x_1$ og $W_2 = x_3$ er de lovlige kodeord for denne kanalen, finn feilsannsynligheten pr. kodeord. Med disse kodeordene, hvilken informasjonsrate (R) i (bit pr. kanalsymbol) kan overføres over kanalen?

f) Finn de samme størrelsene som over for det tilfellet at kodeordene velges som følger: $W_1 = x_1x_1$, $W_2 = x_2x_3$, $W_3 = x_3x_5$, $W_4 = x_4x_2$ og $W_5 = x_5x_4$.

Oppgave 3

For kanalen nedenunder, finn kanalkapasiteten og den inngangskilde-sannsynlighet som gir midlere gjensidig informasjon lik kanalkapasiteten. Merk at elementene i

Sven Ole Aase

Førsteamanuensis, dr.ing.

Høgskolen i Stavanger

Institutt for elektroteknikk og databehandling

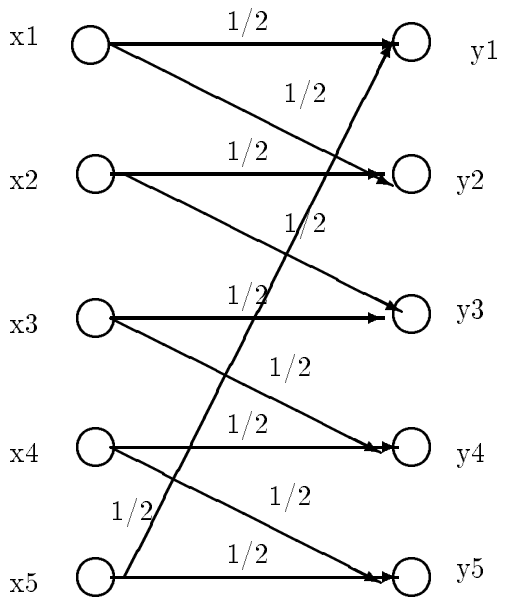
Postboks 2557 Ullandhaug

4004 Stavanger

Tel.: 51 83 20 09

Fax.: 51 83 17 50

E-mail: aase@hsr.no



matrisen er de betingede sannsynlighetene $P(y_j \mid x_i)$ og at i'en refererer seg til *radnummer* og j'en til *kolonnenummer*.

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha-\beta & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & 1-\alpha-\beta \end{bmatrix} \tag{2}$$

Oppgave 4

Hamming-koden: En Hammingkode med blokkstørrelse $N = 7$ kan rette opp én bitfeil. En slik kode er en såkalt $(7, 4)$ blokk kode fordi en bruker 4 av 7 binære symboler i en blokk av 7 til selve informasjonen. De resterende 3 bit brukes til paritetsinformasjon (svarer til introduksjon av redundans på sendersiden). Et kodeord for en kildestreng av 4 binære symboler, $d_0d_1d_2d_3$, vil se ut som følger:

$$p_0p_1d_0p_2d_1d_2d_3 \tag{3}$$

der p_0, p_1 og p_2 er *paritetsbit* som beregnes slik:

$$\begin{aligned} p_0 &= d_0 \oplus d_1 \oplus d_3 \\ p_1 &= d_0 \oplus d_2 \oplus d_3 \\ p_2 &= d_1 \oplus d_2 \oplus d_3 \end{aligned} \tag{4}$$

$\oplus$ betegner addisjon modulo 2 ($0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0$). $d_0, \ldots, d_3$ er databitene i den meldingen vi ønsker å overføre.

Eksempel: Anta at vi ønsker å sende den binære meldingen

$$00111010 \tag{5}$$

over en binær symmetrisk kanal med en eller annen feilsannsynlighet ϵ. Vi deler meldingen opp i to gruper hver med 4 binære symboler; 0011 og 1010. Paritetsbitene beregnes ved:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 \oplus 0 \oplus 1 &= 1 \\ p_1 &= 0 \oplus 1 \oplus 1 &= 0 \\ p_2 &= 0 \oplus 1 \oplus 1 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

for første gruppe og

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \oplus 0 \oplus 0 &= 1 \\ p_1 &= 1 \oplus 1 \oplus 0 &= 0 \\ p_2 &= 0 \oplus 1 \oplus 0 &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

for den andre. Utsendte kodeord blir dermed:

$$1000011 \quad 1011010 \tag{8}$$

Anta at for hver gruppe av 7 binær symboler er *ett* blitt overført feil over vår kanal. La oss anta at mottatt melding er:

$$10\underline{1}0011 \quad 1011\underline{1}10 \tag{9}$$

Dekoding foregår på følgende vis: (for å antyde at mottatte binære symboler kan være ulik de sendte, merkes de med "hatt"). En berenger størrelsene s_0, s_1 og s_2 ved:

$$\begin{aligned} s_2 &= \hat{p_0} \oplus \hat{d_0} \oplus \hat{d_1} \oplus \hat{d_3} \\ s_1 &= \hat{p_1} \oplus \hat{d_0} \oplus \hat{d_2} \oplus \hat{d_3} \\ s_0 &= \hat{p_2} \oplus \hat{d_1} \oplus \hat{d_2} \oplus \hat{d_3} \end{aligned} \tag{10}$$

Strengen $s_0 s_1 s_2$ vil nå peke på den posisjon i motttatt kodeord hvor feil binært symbol er mottatt ($s_0 s_1 s_2 = 000$ angir at ingen feil er detektert). Anvendt på ovenstående eksempel får en for første gruppe av 7 mottatte binære symboler

$$\begin{aligned} s_2 &= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 &= 1 \\ s_1 &= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 &= 1 \\ s_0 &= 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Dette indikerer en feil i posisjon $s_0 s_1 s_2 = 011 = 3_{10}$. Dermed kan vi, hvis vi er sikre på at det kun er her det er feil, rette opp feilen og dekode meldingen som 0011.

For andre gruppe får en

$$\begin{aligned} s_2 &= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 &= 1 \\ s_1 &= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 &= 0 \\ s_0 &= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 &= 1 \end{aligned} \tag{12}$$

Dette indikerer en feil i posisjon $s_0 s_1 s_2 = 101 = 5_{10}$. Dermed kan vi, hvis vi er sikre på at det kun er her det er feil, rette opp feilen og dekode meldingen som 1010.

Konklusjon: (7,4) Hamming-koden kan rette opp feil i inntil ett bit når 4 informasjonsbit kodes ved bruk av kodeord med 7 binære symboler. Hamming-koden er altså et eksempel på at en kan oppnå mer pålitelig informasjonsoverføring gjennom introduksjon av redundans i kildeinformasjonen, – d.v.s. reduksjon av kildens informasjonsrate.

Så til oppgaven:

a) Finn Hammingkodeordene til alle kombinasjoner av 4 informasjonsbit. Hvis alle 16 sammensatte kildesymbol dannet ved kombinasjon av 4 binære symboler er like sannsynlige er entropien til kilden og informasjonsraten, r, lik 1 bit pr. symbol. Hva er informasjonsraten etter Hammingkoding?

b) Definér Hammingavstanden mellom to kodeord som antallet bitposisjoner der de to kodeordene er forskjellige. Hva er minste Hammingavstand for koden du konstruerte i forrige delspørsmål.

c) Dekod, med eventuell feil-korrigering, følgende kodeord når vi vet at hvert kodeord har maksimalt en bitposisjon feil:

$$\begin{array}{l} 0011101 \\ 1011001 \\ 0110010 \\ 0111011 \\ 1000101 \\ 0100101 \\ 1001110 \\ 1001111 \end{array} \qquad (13)$$

d) Hva skjer hvis fremgangsmåten blir brukt på motatte kodeord med mer enn én feil?