DATO: 15. desember 1995

HØGSKOLEN I STAVANGER

Institutt for elektroteknikk og databehandling

EKSAMEN I: TE 272 Signalbehandling

VARIGHET: 5 timer

TILLATTE HJELPEMIDLER: Kalkulator

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 5 SIDER

MERKNADER: Noen nyttige formler er oppgitt på siste side.

Oppgave 1

a) Hva betyr det at et system T med $y(n) = T[x(n)]$ er:

1. Lineært?
2. Tidsinvariant?

b) Et lineært, tidsinvariant (LTI) system kan beskrives ved hjelp av enhetspulsresponsen $h(n)$. Hva vil det si at et slikt system er *kausalt*? Hvordan vil du gå fram for å implementere et filter som ikke er kausalt?

c) For et LTI–system er sammenhengen mellom inngangssignal $x(n)$ og utgangssignal $y(n)$ gitt ved foldning:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k). \tag{1}$$

Vis at foldning i tidsplanet svarer til multiplikasjon i z–planet.

d) Finn systemfunksjonen til følgende kausale system:

$$y(n) - 3y(n-1) - y(n-2) = x(n) + 2x(n-1), \tag{2}$$

og skissér konvergensområdet.

Oppgave 2

a) Gitt systemfunksjonen

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \ |z| > |a|. \tag{3}$$

Finn inverstransformen, dvs. enhetspulsresponsen $h(n)$.

b) Hva menes med at et system er BIBO–stabilt? Vis at et system er BIBO–stabilt hvis enhetspulsresponsen er absolutt summérbar, og sjekk deretter om systemet vi har i a) er BIBO–stabilt.

c) Finn inverstransformen til følgende systemfunksjon:

$$H_1(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}, \ \ |z| > \text{maks}\{|a|, |b|\}. \tag{4}$$

Oppgave 3

Den diskrete Fourier–transformen (DFT) er gitt ved

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}. \tag{5}$$

a) Anta at $h(n)$ er null når $n \notin \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Hva er sammenhengen mellom DFT–verdiene og frekvensresponsen til $h(n)$?

b) Forklar hvordan du vil gå frem for å finne approksimasjoner til den kontinuerlige frekvensresponsen til $h(n)$ – ved hjelp av DFT–beregninger. Hvorfor kan dette ofte være enklere enn å beregne frekvensresponsen algebraisk?

c) Vi ønsker å beregne foldningen av et inngangssignal $x(n)$ og enhetspulsresponsen til et FIR–filter $h(n)$. Inngangssignalet har uendelig lengde, og filterresponsen har lengde L_h. Gjør rede for hvordan denne beregningen kan gjøres ved *blokk*–baserte DFT–operasjoner.

Oppgave 4

I denne oppgaven skal vi se på hvordan en kan bruke digital signalbehandling til å forbedre kvaliteten på digitaliserte (sort–hvitt) bilder. Dersom linsen i et kamera er ute av fokus når et bilde tas, vil bildet bli uskarpt. I tillegg har en alltid støy.

Et bilde kan vi tenke på som et 2–dimensjonalt signal $s(n, m)$, men i mange tilfeller kan en forenkle problemstillingen ved at all filtrering av bildet skjer 1–dimensjonalt: Linje–for–linje, etterfulgt av kolonne–for–kolonne. I sistnevnte tilfelle kan vi modellere bilder med en 1–dimensjonal stokastisk prosess $s(n)$.

En vanlig modell for bilder er en AR(1)–prosess med korrelasjonskoeffisient $\rho = 0.95$, dvs. at $s(n)$ tenkes generert ved:

$$s(n) = 0.95s(n-1) + w(n), \tag{6}$$

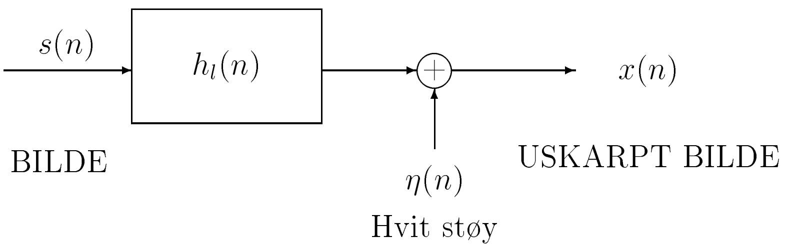
hvor $w(n)$ er en hvit støy–prosess med varians σ_w^2 (og middelverdi null).

a) Finn autokorrelasjonsfunksjonen til bilde–prosessen $s(n)$,

$$r_{ss}(k) = E[s(n)s(n+k)]. \tag{7}$$

Tips: Her kan det være lurt å starte med å finne enhetspulsresponsen til filteret i ligning 6. Finn deretter $r_{ss}(k)$ for *negative* verdier av k, og utvid løsningen ved å anta symmetrisk funksjon.

b) Finn effektspektraltetthetsfunksjonen og skissér denne. Er $s(n)$ et hurtig– eller langsomtvarierende signal?



Figur 1: Fotografering med feilinnstillt linse.

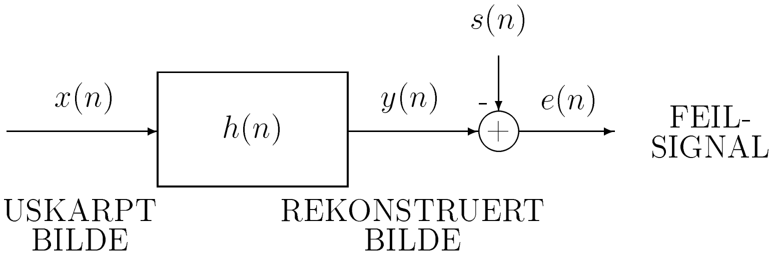
c) Fotograferingen er vist i figur 1. Støyen antas uavhengig av bildesignalet. En god modell for "utsmøringen" av bildet pga. linsen er et lavpassfilter med konstant enhetspulsrespons:

$$h_l(n) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{8}$$

dvs. at lysintensiteten i ett punkt i originalbildet blir spredt jevnt ut til N punkter i det uskarpe bildet.

Finn frekvensresponsen til "linsefilteret", $|H_l(e^{j\omega})|$, og skissér denne. Er det mulig å rekonstruere $s(n)$ eksakt fra $s(n) * h_l(n)$? Begrunn svaret.

Vi skal nå forsøke å gjøre det observerte bildet $x(n)$ skarpt ved hjelp av et nytt filter $h(n)$. Figure 2 viser filtreringen. Målet er her å minimalisere det



Figur 2: Wiener–filtrering.

forventede avviket mellom filterutgangen og det opprinnelige bildet, dvs.

$$\min \; E[(y(n) - s(n))^2] \text{ med hensyn på } h(n). \tag{9}$$

For å forenkle beregningene begrenser vi filterlengden til $h(n)$ til 3 tapper:

$$h(n) = \begin{cases} \neq 0, & 0 \leq n < 3 \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{10}$$

og i tillegg setter vi $N = 2$, altså moderat "utsmøring" av bildet. Videre antas $\sigma_w^2 = \sigma_\eta^2 = 1.0$.

d) Finn ligningssystemet som må løses for å utføre minimaliseringen i ligning 9. Ligningssystemet skal inneholde de 3 ukjente filtertappene og verdier av r_{xx} og r_{sx}.

e) Finn autokorrelasjonsfunksjonen til det observerte bildet $x(n)$. Beregn deretter de nødvendige verdiene av denne som trengs for å løse ligningssystemet i delspørsmål d).

f) Finn krysskorrelasjonsfunksjonen mellom originalbildet og det observerte bildet, $r_{sx}(k) = E[s(n)x(n+k)]$. Beregn deretter de nødvendige verdiene av denne som trengs for å løse ligningssystemet i delspørsmål d).

g) Finn de 3 verdiene for tappene i Wiener–filteret. Regn ut filterets frekvensrespons og skissér denne.

Nyttige formler

Annengradsligningen $az^2 + bz + c = 0$ har løsning

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{11}$$

$$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega \tag{12}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1 - a^N}{1 - a} \tag{13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a},\ \ |a| < 1 \tag{14}$$