DATO: 26. november 1994

HØGSKOLEN I STAVANGER

Institutt for elektroteknikk og databehandling

EKSAMEN I: 4542 Informasjonsteori og feilkorrigerende koding

VARIGHET: 5 timer

TILLATTE HJELPEMIDLER: Kalkulator

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 SIDER

MERKNADER: Delspørsmålene veier likt i vurderingen

Oppgave 1

Vi har en første ordens Markov-kilde som genererer to symboler, '0' og '1'. Sannsynligheten for å få generert '1' etter at '0' er generert er $P(1|0) = p$ og sannsynligheten for å få generert '0' etter at '1' er generert er $P(0|1) = q$.

a) Tegn tilstandsdiagram for Markov-kilden og finn de stasjonære tilstandssannsynlighetene $P(0)$ og $P(1)$ uttrykt ved p og q.

I resten av denne oppgaven setter vi $p = \frac{2}{3}$ og $q = \frac{1}{2}$.

b) Finn kildens entropi, $H(S)$.

c) Finn entropien til den *duale* kilden til Markov-kilden, $H(\overline{S})$. Sammenlign med svaret i forrige oppgave og kommentér.

d) Finn entropien til den duale kilden til den *utvidede* kilden til Markov-kilden, $H(\overline{S^2})$. Hva blir entropien pr. opprinnelig symbol? Sammenlign med svarene i b) og c) og kommentér.

Oppgave 2

En hukommelsesløs kilde genererer symboler tatt fra alfabetet $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ med sannsynligheter $P(s_1) = \frac{1}{2}$, $P(s_2) = \frac{1}{3}$ og $P(s_3) = \frac{1}{6}$.

a) Finn kildens entropi, $H(S)$.

b) Foreta Huffman-koding av kilden og tegn kodetre. Finn midlere kodeordslengde.

c) Finn entropien til den utvidede kilden, $H(S^2)$

d) Foreta Huffman-koding av den utvidede kilden og tegn kodetre. Finn midlere kodeordslengde pr. opprinnelig symbol og sammenlign med svaret i delspørsmål b). Kommentér.

Oppgave 3

En informasjonskanal er definert ved et inngangsalfabet $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$, et utgangsalfabet $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$ og kanalmatrisen $\mathbf{P}$, hvor elementet i rad i og kolonne j skrives $p_{ij} = P(b_j|a_i)$.

a) Finn kanalens kapasitet når kanalmatrisen er gitt ved

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \overline{p} & p & 0 & 0 \\ p & \overline{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{p} & p \\ 0 & 0 & p & \overline{p} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

hvor $\overline{p} = 1 - p$.

b) Dersom vi setter $p = \frac{1}{2}$, ser du noen enkel kodings-/dekodingsstrategi for å nå kanalkapasiteten?

Oppgave 4

Generatormatrisen til en lineær blokk-kode er gitt ved

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

a) Finn generatormatrisen og paritetsjekkmatrisen til en ekvivalent *systematisk* kode.

b) Finn kodeordene til den *duale* koden til koden i a). Hvor mange feil kan denne koden rette? Begrunn svaret.

c) Konstruér en standard-tabell for koden i b). Er koden perfekt? Begrunn svaret.

d) Dersom kodeordene i b) sendes over en binær, symmetrisk kanal med bitfeilsannsynlighet p, hva blir sannsynligheten for dekodingsfeil?

Oppgave 5

a) Konstruér den utvidede kroppen $GF(2^4)$ via det primitive polynomet $p(D) = D^4 + D + 1$.

b) Finn generatorpolynomet til den binære BCH-koden som har blokklengde 15 og som kan rette $t = 2$ feil.

c) Anta at sekvensen $y(D) = D^{13} + D^{11} + D^9 + D^6 + D^5 + D^4 + D + 1$ er mottatt. Finn syndromene.

d) Dersom vi antar at $\nu = 2$ feil har oppstått ved overføringen, vil Petersons algoritme for algebraisk dekoding av BCH-koder føre til følgende ligningssystem:

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Finn koeffisientene i feillokasjonspolynomet, σ_1 og σ_2.

e) Dekod $y(D)$ med Chiens algoritme.