DATO: 25 februar 1997

HØGSKOLEN I STAVANGER
AVDELING FOR TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAG
EKSAMEN I: TE509 Digitale og analoge filtre
LENGDE PÅ EKSAMEN: 5 timer, 09.00-14.00
TILLATTE HJELPEMIDLER: Matematisk formelsamling, Kalkulator
OPPGAVESETTET BESTÅR AV: 5 sider

Oppgave 1

(a) [10%] I figur 1, finn hvilke frekvensresponser (absoluttverdi) som passer best til beskrivelsene under. Alle respons-plottene bruker samme aksesystem, og logaritmisk skala både i x- og y-retning. Begrunn svarene.

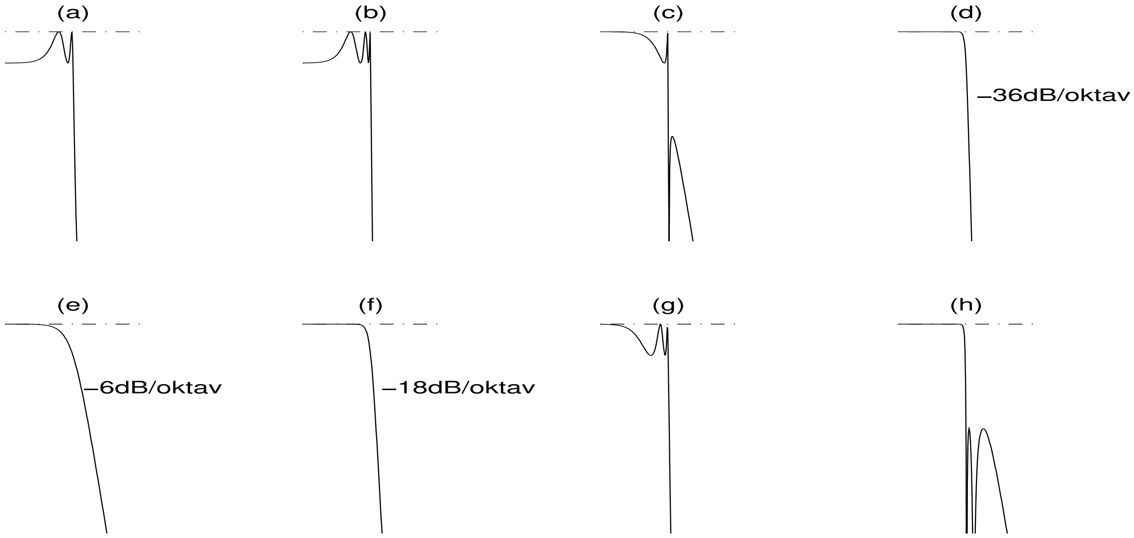
(i) 3. orden Butterworth lavpass

(ii) 5. orden Chebyshev type 1 lavpass

(iii) 4. orden Chebyshev type 1 lavpass

(iv) 6. orden Butterworth lavpass

(v) 4. orden Chebyshev type 2 lavpass



Figur 1: Frekvensresponser, tidskontinuerlige filtre

(b) [10%] Gjør tilsvarende med figur 2 og beskrivelsene under. Igjen er aksene de samme for alle figurene, men her har vi lineær skala både i x og y. Begrunn også her svarene.

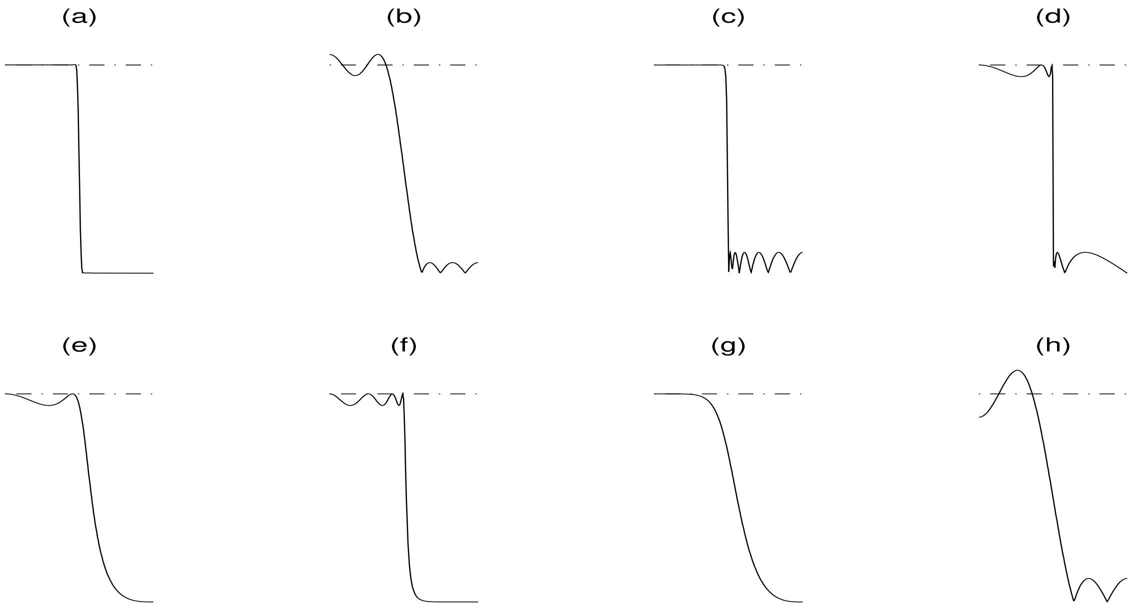
(i) 150. orden FIR lavpass

(ii) 3. orden Butterworth lavpass

(iii) 7. orden Chebyshev type 1 lavpass

(iv) 10. orden lavpassfilter designet med Parks-McClellan-algoritmen

(v) Chebyshev type 2 lavpass



Figur 2: Frekvensresponser, tidsdiskrete filtre

Oppgave 2

Den normaliserte lavpass-til-båndstopp-transformasjonen er gitt ved

$$\overline{s} = \frac{1}{Q} \cdot \frac{s}{s^2 + 1} \tag{1}$$

der $\overline{s}$ er frekvensvariabel for lavpassfilteret, og Q er kvalitetsfaktoren.

(a) **[5%]** Begrunn med figur og forklaringer hvorfor dette blir en slik transformasjon. (Du trenger ikke å regne.)

Det skal konstrueres et båndstoppfilter med følgende spesifikasjoner:

- Passbånd: $0 \leq f \leq 5$ kHz og $f \geq 12$ kHz
- Dempning i passbånd: maksimum 3 dB
- Stoppbånd: 6.5 kHz $\leq f \leq 8.9$ kHz
- Dempning i stoppbånd: minimum 20 dB

(b) **[15%]** Finn Butterworth-tilnærmingen for det normaliserte filteret.

(c) **[5%]** Hvordan denormaliserer man ligningen for å finne den endelige overføringsfunksjonen $H(s)$? (Du trenger ikke å regne ut denne.)

Oppgave 3

(a) [9%] Den bilineære transformasjonen er gitt ved

$$s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{2}$$

Beskriv hvordan vi kan være sikre på at et stabilt filter (i s) forblir stabilt etter transformasjon til z ved bruk av denne.

(b) [9%] Ta som utgangspunkt et 3. ordens Chebyshev lavpassfilter, og design ved hjelp av den bilineære transformasjonen et tidsdiskret lavpassfilter med 0.5 dB knekkfrekvens $\omega_c = 0.4\pi$.

(c) [9%] Gitt følgende ideelle, ikke-kausale respons for et lineær fase FIR-filter:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \geq \omega_c \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{3}$$

Finn impulsresponsen til dette filteret.

(d) [9%] Bruk vindusmetoden og et rektangulært vindu av lengde 5 til å lage et høypassfilter med $\omega_c = 0.7\pi$. Hvordan normaliserer man responsen til dette filteret?

(e) [9%] Forklar hvordan frekvens-samplingsmetoden for filterdesign fungerer. Hva er kriteriet for at man skal kunne implementere det resulterende filteret effektivt ved en FIR/IIR-struktur, og hvordan gjøres dette?

(f) [5%] Hva medfører det at et filter har lineær fase? Hva er forutsetningene for at dette skal være tilfelle for et filter?

(g) [5%] Beskriv (tegn og forklar) hva slags filtre som resulterer fra den optimale metoden for filterdesign (Parks-McClellan). Hvordan kan filtrene kalles optimale?

Formler

Tidskontinuerlig Fouriertransform

$$
\begin{aligned}
X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t \\
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}
$$

Tidsdiskret Fouriertransform

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

DFT/IDFT

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} \\
x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}
\end{aligned}
$$

Frekvenstransformasjoner

$$
\begin{aligned}
\overline{s} &= \frac{1}{s} && \text{(LP}\rightarrow\text{HP)} \\
\overline{s} &= \frac{1}{Q}\frac{s}{s^2+1} && \text{(LP}\rightarrow\text{BS)} \\
\overline{s} &= Q\frac{s^2+1}{s} && \text{(LP}\rightarrow\text{BP)} \\
\Omega_0 &= \sqrt{\Omega_l\Omega_u} \\
B &= \Omega_u - \Omega_l \\
Q &= \frac{\Omega_0}{B}
\end{aligned}
$$

Nødvendig filterorden

$$
\begin{aligned}
n &\geq \frac{\log[(10^{0.1A_s}-1)/\varepsilon^2]}{2\log\omega_s} && \text{(Butterworth)} \\
n &\geq \frac{\cosh^{-1}\sqrt{(10^{0.1A_s}-1)/\varepsilon^2}}{\cosh^{-1}\omega_s} \\
&\approx \frac{\ln\sqrt{4(10^{0.1A_s}-1)/\varepsilon^2}}{\ln(\omega_s+\sqrt{\omega_s^2-1})} && \text{(Chebyshev)}
\end{aligned}
$$

Bilineær transformasjon

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \\ \Omega &= \frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2} \end{aligned}$$

Diverse matematiske identiteter

$$\begin{aligned} e^{jx} &= \cos(x) + j\sin(x) \\ e^{-jx} &= \cos(x) - j\sin(x) \\ \tan x/2 &= \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \\ \sin 2x &= 2\sin x\cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh^{-1} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ \cosh^{-1} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \end{aligned}$$

3 dB rippel Butterworth-polynomer ($\varepsilon = 1$)

n	Polynom	Faktorisert polynom
1	$s+1$	$s+1$
2	$s^2+1.4142s+1$	$s^2+1.4142s+1$
3	s^3+2s^2+2s+1	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$s^4+2.613s^3+3.414s^2+2.613s+1$	$(s^2+0.765s+1)(s^2+1.848s+1)$

0.5 dB rippel Chebyshev-polynomer ($\varepsilon = 0.3493$):

n	Polynom	Faktorisert polynom
1	$s+2.863$	$s+2.863$
2	$s^2+1.425s+1.516$	$s^2+1.425s+1.516$
3	$s^3+1.253s^2+1.535s+0.716$	$(s+0.626)(s^2+0.626s+1.142)$
4	$s^4+1.197s^3+1.717s^2+1.025s+0.379$	$(s^2+0.351s+1.064)(s^2+0.845s+0.356)$