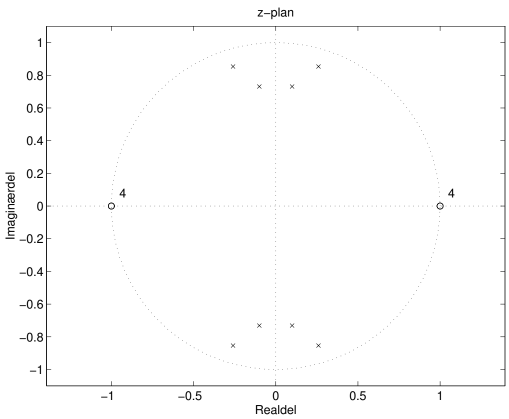
DATO: 19 desember 1996

HØGSKOLEN I STAVANGER
AVDELING FOR TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAG
EKSAMEN I: TE509 Digitale og analoge filtre
LENGDE PÅ EKSAMEN: 5 timer, 09.00-14.00
TILLATTE HJELPEMIDLER: Matematisk formelsamling, Kalkulator
OPPGAVESETTET BESTÅR AV: 5 sider

Oppgave 1

(a) **[10%]** Beskriv (kort, men komplett) hva vi mener med frekvensresponsen til et filter.

(b) **[10%]** Alle praktisk interessante filtre er *stabile*. Beskriv kort hva dette betyr, og fortell kort hvordan vi kan se om en overføringsfunksjon realiserer et stabilt filter.



Figur 1: Pol- og nullpunktplassering

(c) **[10%]** Gitt pol- og nullpunktplasseringer for en overføringsfunkssjon som gitt i figur 1, gi en begrunnet beskrivelse av hva slags filter dette er. Har det lineær fase?

(d) **[10%]** Impulsinvariansmetoden for filterdesign gjør bruk av sammenhengen

$$\begin{aligned} H_c(s) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{s - p_k} \\ &\Downarrow \\ H(z) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}} \end{aligned} \tag{1}$$

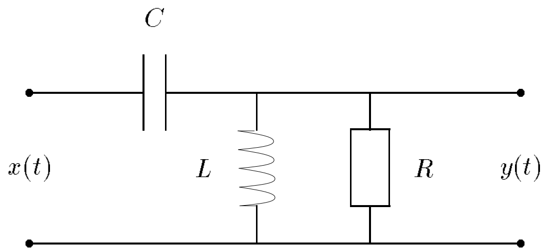
Vis hvordan denne sammenhengen kommer frem. Forklar også kort hvordan vi vet at filterstabilitet beholdes ved bruk av dette.

(e) **[10%]** Vi har sett på tilnærmingsmetoder for lavpassfiltre av typen

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 P_n^2(\Omega)} \tag{2}$$

der polynomer $P_n(\Omega)$ for Butterworth- og Chebyshev (type 1)-filtre er gitt i formelsamlingen bakerst. Bruk dette til å vise at for høye frekvenser ($\Omega \gg \Omega_c$) vil et Chebyshev-filter av orden n ha ca. $6(n-1)$ dB høyere dempning enn et tilsvarende Butterworth-filter.

Oppgave 2



Figur 2: Filterkrets

(a) [10%] Hva slags filter (lavpass, høypass etc.) realiserer kretsen i figur 2? Begrunn svaret.

(b) [10%] Vis at kretsen realiserer et 2. ordens Butterworth-filter, og finn knekkfrekvensen f_c for dette.

Oppgave 3

Det skal konstrueres et tidskontinuerlig båndpassfilter med følgende spesifikasjoner:

- Passbånd: 6.5 kHz $\leq f \leq$ 8.9 kHz
- Dempning i passbånd: maksimum 3 dB
- Stoppbånd: $0 \leq f \leq 5$ kHz og $f \geq 12$ kHz
- Dempning i stoppbånd: minimum 20 dB

(a) [15%] Finn Butterworth-tilnærmingen for det normaliserte filteret $H_{BP,N}(s)$.

(b) [5%] Hvordan denormaliserer man ligningen for å finne den endelige overføringsfunksjonen $H_{BP}(s)$? (Du trenger ikke å regne ut denne.)

(c) [5%] Hvordan ville du gå frem for å designe et tidsdiskret filter som gjør samme jobben? Anta at du har tilgjengelig en A/D- og D/A-konverterer med valgbar samplingsrate, og en digital signalprosessor. Du trenger ikke regne ut overføringsfunksjonen her; vi er kun interessert i hvordan det skal gjøres.

Oppgave 4

(a) [8%] Lag et tidsdiskret maksimalt flatt lavpassfilter med normalisert 3dB knekkfrekvens $\omega_c = 0.05\pi$ og dempning minst 60 dB for $\omega > 0.5\pi$. Filteret trenger ikke å ha lineær fase.

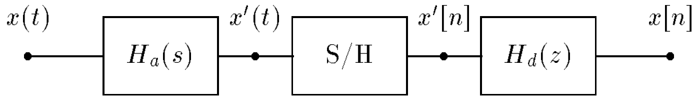
(b) [8%] Bruk vindusmetoden og et rektangulært vindu til å lage et tidsdiskret lavpassfilter av orden 4 (dvs. 5 tapper), med knekkfrekvens som over. Hva blir her dempningen for $\omega = 0.5\pi$?

(c) [8%] Man skal lage et tidsdiskret båndstoppfilter med lite (0.5 dB) rippel i passbåndet og ganske bratte flanker. Gitt de metodene vi har sett på i faget, begrunn hvilke du ville velge i følgende tilfeller:

(i) Filterets orden skal minimaliseres

(ii) Filteret skal ha lineær fase og minimal orden

Oppgave 5



Figur 3: System for sampling av audiosignal

Vi skal lage et system for sampling av lydsignaler, se figur 3. Gitt følgende verdier for systemet:

- Samplingsfrekvens $f_s = 48$ kHz
- Båndbredde (0.5dB) $f_c = 20$ kHz
- Alias-komponenter dempes minst 95 dB

(a) **[8%]** Identifiser og beskriv kort de forskjellige delene av systemet.

(b) **[8%]** Finn ordenen til et passende (maksimalt flatt) anti-aliasing-filter $H_a(s)$.

(c) **[8%]** Finn et passende tidsdiskret filter $H_d(z)$ for dette systemet.

(d) **[8%]** Du bør ha fått et uhåndterbart filter i deloppgave (b). Foreslå en metode søm gjør ar du kan klare deg med et 6. ordens filter $H_a(s)$. Beskriv hvilke krav du nå får til filteret $H_d(z)$.

Formler

Tidskontinuerlig Fouriertransform

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

Tidsdiskret Fouriertransform

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

DFT/IDFT

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} \\ x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N} \end{aligned}$$

Sallen-Key overføringsfunksjon

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{K}{s^2+(3-K)s+1} \\ K &= 1+R_A/R_B \\ RC &= \Omega_c^{-1} \end{aligned}$$

Frekvenstransformasjoner

$$\begin{aligned} \overline{s} &= \frac{1}{s} && \text{(LP}\rightarrow\text{HP)} \\ \overline{s} &= \frac{1}{Q}\frac{s}{s^2+1} && \text{(LP}\rightarrow\text{BS)} \\ \overline{s} &= Q\frac{s^2+1}{s} && \text{(LP}\rightarrow\text{BP)} \\ \Omega_0 &= \sqrt{\Omega_l\Omega_u} \\ B &= \Omega_u-\Omega_l \\ Q &= \frac{\Omega_0}{B} \end{aligned}$$

Nødvendig filterorden

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\log[(10^{0.1A_s}-1)/\varepsilon^2]}{2\log\omega_s} && \text{(Butterworth)} \\ n &\geq \frac{\cosh^{-1}\sqrt{(10^{0.1A_s}-1)/\varepsilon^2}}{\cosh^{-1}\omega_s} \\ &\approx \frac{\ln\sqrt{4(10^{0.1A_s}-1)/\varepsilon^2}}{\ln(\omega_s+\sqrt{\omega_s^2-1})} && \text{(Chebyshev)} \end{aligned}$$

Tilnærmingspolynomer ($P_n(\Omega)$) for filtre med knekkfrekvens $\Omega_c = 1$

$$
\begin{aligned}
B_n(\Omega) &= \Omega^n && \text{(Butterworth)} \\
C_0(\Omega) &= 1 && \text{(Chebyshev)} \\
C_1(\Omega) &= \Omega \\
C_n(\Omega) &= 2\Omega C_{n-1}(\Omega) - C_{n-2}(\Omega), \quad n \geq 2
\end{aligned}
$$

Bilineær transformasjon

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \\
\Omega &= \frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}
\end{aligned}
$$

Diverse matematiske identiteter

$$
\begin{aligned}
e^{jx} &= \cos(x) + j\sin(x) \\
e^{-jx} &= \cos(x) - j\sin(x) \\
\tan x/2 &= \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \\
\sin 2x &= 2\sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\sinh^{-1} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\
\cosh^{-1} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})
\end{aligned}
$$

3 dB rippel Butterworth-polynomer ($\varepsilon = 1$)

n	Polynom	Faktorisert polynom
1	$s + 1$	$s + 1$
2	$s^2 + 1.4142s + 1$	$s^2 + 1.4142s + 1$
3	$s^3 + 2s^2 + 2s + 1$	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1$	$(s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)$

0.5 dB rippel Chebyshev-polynomer ($\varepsilon = 0.3493$):

n	Polynom	Faktorisert polynom
1	$s + 2.863$	$s + 2.863$
2	$s^2 + 1.425s + 1.516$	$s^2 + 1.425s + 1.516$
3	$s^3 + 1.253s^2 + 1.535s + 0.716$	$(s + 0.626)(s^2 + 0.626s + 1.142)$
4	$s^4 + 1.197s^3 + 1.717s^2 + 1.025s + 0.379$	$(s^2 + 0.351s + 1.064)(s^2 + 0.845s + 0.356)$