DATO: 16 mai 1995

HØGSKOLEN I STAVANGER
AVDELING FOR TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAG
EKSAMEN I: 4509 Digitale og analoge filtre
LENGDE PÅ EKSAMEN: 5 timer, 09.00-14.00
TILLATTE HJELPEMIDLER: Kalkulator
OPPGAVESETTET BESTÅR AV: 4 sider

Oppgave 1

Figur 1 viser koblingsskjemaet for et Sallen-Key lavpassfilter. Anta at operasjonsforsterkeren er ideell.

(a) **[10%]** Tegn et ekvivalent koblingsskjema for kretsen, og benytt denne til å finne et uttrykk for kretsens overføringsfunksjon.

(b) **[10%]** Finn et uttrykk for kretsens forsterkning ved $\Omega = 0$ Hz.

(c) **[10%]** Finn polene i overføringsfunksjonen og gi kommentarer angående kretsens stabilitet.

(d) **[10%]** Finn komponentverdier slik at kretsen realiserer et Butterworth-filter hvor 3dB-frekvensen (dvs. 3dB dempning relativt forsterkningen ved 0 Hz) blir $f_c = 1$ kHz. (Du trenger ikke bruke standardverdier for komponentene.)

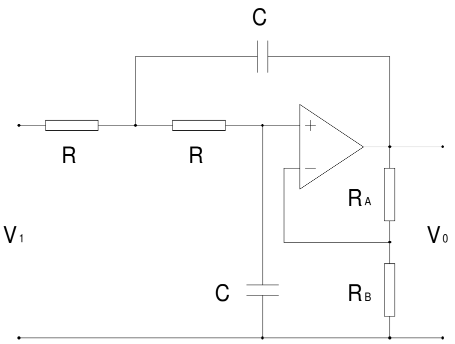

Figure 1: Sallen-Key-filter

(e) **[10%]** Hvilken av figurene 2a-d vil best beskrive kretsens amplituderespons? Begrunn svaret.

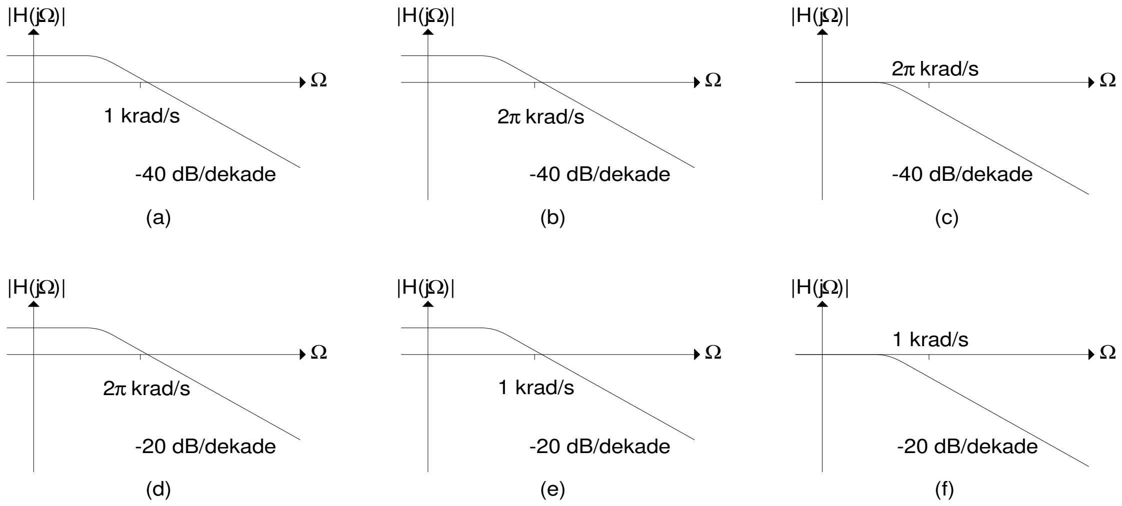

Figure 2: Amplituderesponser

Oppgave 2

Den normaliserte lavpass-til-båndstopp-transformasjonen er gitt ved

$$\overline{s} = \frac{1}{Q} \cdot \frac{s}{s^2+1} \tag{1}$$

der $\overline{s}$ er frekvensvariabel for lavpassfilteret, og Q er kvalitetsfaktoren.

(a) **[10%]** Begrunn med figur og forklaringer hvorfor dette blir en slik transformasjon. (Du trenger ikke å regne.)

Det skal konstrueres et båndstoppfilter med følgende spesifikasjoner:

- Passbånd: $0 \leq f \leq 5$ kHz og $f \geq 12$ kHz
- Dempning i passbånd: maksimum 3 dB
- Stoppbånd: 6.5 kHz $\leq f \leq$ 8.9 kHz
- Dempning i stoppbånd: minimum 20 dB

(b) **[10%]** Finn Butterworth-tilnærmingen for det normaliserte filteret.

(c) **[10%]** Hvordan denormaliserer man ligningen for å finne den endelige overføringsfunksjonen $H(s)$? (Du trenger ikke å regne ut denne.)

Oppgave 3

Den bilineære transformasjonen er gitt ved

$$s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{2}$$

(a) **[10%]** Finn sammenhengen mellom frekvensene Ω (i s-planet) og ω (i z-planet) som fremkommer ved bruk av denne transformasjonen.

(b) **[10%]** Beskriv kort impulsinvarians-metoden for filterdesign. Gjør sammenligninger med den bilineære transformasjonen.

(c) **[10%]** Kan man bruke impulsinvarians-metoden til å lage båndstoppfiltre? Begrunn svaret.

(d) **[10%]** Bruk bilineær transformasjon til å designe et lavpassfilter med 3 dB knekkfrekvens $w_c = 0.2\pi$. Ta som utgangspunkt et 2.ordens Butterworth-filter.

(e) **[10%]** Vi kan transformere lavpassfiltre til andre typer ved å bruke rasjonale funksjoner i z. En slik transformasjon er lavpass-til-høypass-transformasjonen

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = -\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}} \tag{3}$$

Transformasjonen virker slik at målfilteret $H(z)$ fremkommer ved

$$H(z) = H_{lp}(Z)|_{Z^{-1}=G(z^{-1})} \tag{4}$$

Hvis vi setter $Z = e^{j\theta}$ og $z = e^{j\omega}$ kan vi løse ligning 3 for α:

$$\alpha = -\frac{cos(\frac{\theta_p + \omega_p}{2})}{cos(\frac{\theta_p - \omega_p}{2})} \tag{5}$$

der θ_p er lavpassfilterets knekkfrekvens og ω_p er målfilterets.

Gitt et Chebyshev lavpassfilter med knekkfrekvens 0.2π:

$$H_{lp}(z) = \frac{0.001836(1+z^{-1})^4}{(1 - 1.5548z^{-1} + 0.6493z^{-2})(1 - 1.4996z^{-1} + 0.8482z^{-2})} \tag{6}$$

finn et høypassfilter med knekkfrekvens $\omega_p = 0.6\pi$. Medfører transformasjonen økt filterorden i dette eksempelet?

Oppgave 4

(a) **[10%]** Beskriv (tegn og forklar) hva slags filtre som resulterer fra den optimale metoden for filterdesign (Parks-McClellan). Hvordan kan filtrene kalles optimale?

(b) **[10%]** (Her er spørsmålet alle har ventet på.) Hva medfører det at et filter har lineær fase? Hva er forutsetningene for at dette skal være tilfelle for et filter?

(c) **[10%]** Finn et sluttet uttrykk for impulsresponsen til et filter med følgende frekvensrespons:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{7}$$

Lar dette filteret seg realisere? Begrunn svaret.

(d) **[10%]** Bruk vindusmetoden og et rektangulært vindu av orden $M = 4$ til å lage et FIR-filter basert på ligning 7, hvor $\omega_c = 0.3\pi$.

(e) **[10%]** Hvordan ville du gå frem for å finne frekvensresponsen til filteret som resulterer fra oppgave **(d)**? Hva kan umiddelbart sies om faseresponsen?

Formelliste

Du vil sannsynligvis ikke trenge all disse formlene.

Butterworth-polynomer ($\varepsilon = 1$):

n	Polynom
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1.4142s + 1$
3	$s^3 + 2s^2 + 2s + 1$
4	$s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1$
5	$s^5 + 3.2361s^4 + 5.2361s^3 + 5.2361s^2 + 3.2361s + 1$

0.5 dB rippel Chebyshev-polynomer ($\varepsilon = 0.3493$):

n	Polynom
1	$s + 2.863$
2	$s^2 + 1.425s + 1.516$
3	$s^3 + 1.253s^2 + 1.535s + 0.716$
4	$s^4 + 1.197s^3 + 1.717s^2 + 1.025s + 0.379$
5	$s^5 + 1.17251s^4 + 1.9374s^3 + 1.3096s^2 + 0.7525s + 0.1789$

Formler:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

$$n \geq \frac{\log[\varepsilon^{-2}(10^{0.1A_s}-1)]}{2\log\omega_s} \qquad n \geq \frac{\ln\sqrt{4(10^{0.1A_s}-1)/\varepsilon^2}}{\ln(\omega_s+\sqrt{\omega_s^2-1})}$$

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x \qquad e^{-jx} = \cos x - j\sin x$$

$$\overline{s} = \frac{1}{Q}\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

$$Q = \frac{\Omega_0}{B} \qquad \Omega_0 = \sqrt{\Omega_l\cdot\Omega_u}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

$$X(e^{j\omega})\otimes Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})\mathrm{d}\theta$$

$$\tau(\omega) = -\frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\omega}$$