Formelark for eksamen i TE 559 Signaler og systemer

	Kontinuerlig tid	Diskret tid
Beskrivelse	Differensiallikning $y(t) = y'(t) + 3u(t) + 5u'(t)$	Differanseligning $y[k] = -y[k-1] + \frac{1}{2}u[k]$
Beskrivelse	Impulsrespons, $h(t)$ og konvolusjon $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$	Impulsrespons, $h[k]$ og konvolusjon $y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]u[k-i]$
Hvordan finne beskrivelse	Fag: Dig. og analoge filtre RC $\rightarrow$ differensiallikning	Fag: Dig. og analoge filtre
Finne eksplisitt løsning for y	Laplace $\rightarrow$ delbrøk $\rightarrow$ invers laplace	z-transformasjon $\rightarrow$ delbrøk $\rightarrow$ invers z-transformasjon
Transferfunksjon	$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ $= Y(s)/U(s)$	$H(z) = \mathcal{Z}\{h[k]\}$ $= Y(z)/U(z)$
Stabilitet	$H(s)$ har poler i venstre halvplan	$H(z)$ har poler innenfor enhetssirkelen
Frekvensanalyse, periodiske signaler	Fourier-rekke	Diskr.-tid Fourier-rekke =Diskr. Fourier-transf.
Frekvensanalyse, aeriodiske signaler	Fourier-transformasjon	Diskr.-tid Fourier-transf.

Signaler:

Periodisk signal:

$$\begin{aligned} f(t+P) &= f(t), \text{ kontinuerlig}, \\ f[k+N] &= f[k], \text{ diskret}. \end{aligned} \tag{1}$$

Kompleks eksponential (Eulers formel):

$$e^{jx} = \cos x + j \cdot \sin x \tag{2}$$

Systemer:

Integrator:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau \tag{3}$$

Forsinkelse:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t-\tau), \text{ kontinuerlig}, \\ y[k] &= u[k-k_0], \text{ diskret}. \end{aligned} \tag{4}$$

Superposisjonsprinsippet:
$\{\alpha_1 \cdot u_1(t) + \alpha_2 \cdot u_2(t)\} \rightarrow \{\alpha_1 \cdot y_1(t) + \alpha_2 \cdot y_2(t)\}$ for kontinuerligige systemer og $\{\alpha_1 \cdot u_1[k] + \alpha_2 \cdot u_2[k]\} \rightarrow \{\alpha_1 \cdot y_1[k] + \alpha_2 \cdot y_2[k]\}$ for diskrete systemer.

Totalrespons til lineært system:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{zi}(t) + y_{zs}(t), \text{ kontinuerlig}, \\ y[k] &= y_{zi}[k] + y_{zs}[k], \text{ diskret}. \end{aligned} \tag{5}$$

Tidsinvarians:
Initialtilstand $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ og inngang $u(t)$ for $t \geq t_0$ gir utgang $y(t), t \geq t_0$ medfører at initialtilstand $\mathbf{x}(t_0 + T) = \mathbf{x}_0$ og inngang $u(t)$ for $t \geq t_0 + T$ gir utgang $y(t), t \geq t_0 + T$.
Tilsvarende for diskrete systemer med t_0 og T lik heltall k_0, K.

Kausalitet:

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 \text{ for } t < 0, \text{ kontinuerlig}, \\ h[k] &= 0 \text{ for } k < 0, \text{ diskret}. \end{aligned} \tag{6}$$

Konvolusjon, differanse- og differensiallikninger:

Impulsrespons:

$$\begin{aligned} u[k] &= \delta[k] \Rightarrow y[k] = h[k] \text{ diskret} \\ &\quad (\delta[k] \text{ er enhetspulsen}), \\ u(t) &= \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t) \text{ kontinuerlig} \\ &\quad (\delta(t) \text{ er Dirac's deltapuls}). \end{aligned} \quad (7)$$

Diskret konvolusjon:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[i] = h[k] * u[k] \quad (8)$$

Differanselikning for lineært tidsinvariant diskret system:
$y[k+N] + a_{N-1} \cdot y[k+N-1] + \cdots + a_1 \cdot y[k+1] + a_0 \cdot y[k] = b_M \cdot u[k+M] + b_{M-1} \cdot u[k+M-1] + \cdots + b_1 \cdot u[k+1] + b_0 \cdot u[k]$

Kontinuerlig konvolusjon:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau = u(t) * h(t) \quad (9)$$

Differensiallikning for lineært tidsinvariant kontinuerlig system:
$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$

Laplacetransformasjonen og kontinuerlig systemanalyse:

Laplacetransformasjonen:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (10)$$

Invers Laplacetransformasjon:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \end{aligned} \quad (11)$$

for $t \geq 0$

Egenskaper ved Laplacetransformasjonen: Tabell 1.

Laplacetransformasjons-par: Tabell 2.

Transferfunksjon for lineært tidsinvariant kontinuerlig system:

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathcal{L}[h(t)] = \frac{Y(s)}{U(s)} (\text{initialbet. } 0) \\ &= \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + \cdots + a_1 s + a_0} \end{aligned} \quad (12)$$

Poler i transferfunksjon (også for diskrete systemer):

$$\text{De } p_i \text{ som gjør at } H(p_i) = \infty. \quad (13)$$

Nullpunkter i transferfunksjon (også for diskrete systemer):

$$\text{De } z_i \text{ som gjør at } H(z_i) = 0. \quad (14)$$

Stabilitet av kausalt system:
Stabilt system dersom alle poler $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ har $\sigma_i < 0$.

z-transformasjonen og analyse av diskrete systemer:

Ensidig z-transformasjon:

$$F(z) = \mathcal{Z}[f[k]] = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k} \quad (15)$$

Invers z-transformasjon:

$$\begin{aligned} f[k] &= \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_C F(z) z^{k-1} dz \end{aligned} \quad (16)$$

for $k \geq 0$ (C er en lukket kontur i z-planet).

Sammenheng Laplacetransformasjon – z-transformasjon:

$$\mathcal{Z}[f(kT)] = \mathcal{L}[f_s(t)]\Big|_{s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)} \quad (17)$$

Egenskap	Tids-funksjon	Laplace-transformasjon
Linearitet	$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$	$\alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$
s-skift	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
Tids-skift	$f(t-T)q(t-T),\ \text{for } T \geq 0$	$e^{-sT} F(s)$
s-derivasjon	$tf(t)$	$\frac{-d}{ds} F(s)$
Tidsderivasjon	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
Tids-integrasjon	$\int_{0-}^{t} f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
Tids-skalering	$f(at),\ \text{for } a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Konvolusjon	$\int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau$	$H(s)U(s)$
Endeverdi	$f(\infty)$	$\lim_{s \to 0} sF(s)$
Initialverdi	$f(0+)$	$\lim_{s \to \infty} sF(s)$

Tabell 1: Egenskaper ved Laplacetransformasjonen

$f(t),\ t \geq 0$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n, t positivt heltall	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$t \sin(\omega_0 t)$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
$t \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

Tabell 2: Laplacetransformasjons-par

Egenskap	Tidssekvens	z-transformasjon
Linearitet	$\alpha_1 f_1[k] + \alpha_2 f_2[k]$	$\alpha_1 F_1(z) + \alpha_2 F_2(z)$
Multiplikasjon med k	$kf[k]$	$-z\frac{dF(z)}{dz}$
Multiplikasjon med a^k	$a^k f[k]$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
Tidsforsinkelse ($i > 0$)	$f[k-l]$	$z^{-l}F(z) + \sum_{n=1}^{l} f[-n]z^{-l+n}$
Tidsfremskyndelse ($i > 0$)	$f[k+l]$	$z^{l}\left[F(z) - \sum_{n=0}^{l-1} f[n]z^{-n}\right]$
Konvolusjon	$\sum_{i=0}^{k} h[k-i]u[i]$	$H(z)U(z)$

Tabell 3: Egenskaper ved z-transformasjonen

$f[k]$, $k \geq 0$	$F(z)$	$F(z)$
$\delta[k]$	1	1
$\delta[k-n]$	z^{-n}	z^{-n}
1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
b^k	$\frac{z}{z-b}$	$\frac{1}{1-bz^{-1}}$
kb^k	$\frac{bz}{(z-b)^2}$	$\frac{bz^{-1}}{(1-bz^{-1})^2}$
k^2b^k	$\frac{b(z+b)z}{(z-b)^3}$	$\frac{b\left(1+bz^{-1}\right)z^{-1}}{(1-bz^{-1})^3}$
$\sin(k\omega_0 T)$	$\frac{(\sin(\omega_0 T))z}{z^2-2(\cos(\omega_0 T))z+1}$	$\frac{(\sin(\omega_0 T))z^{-1}}{1-2(\cos(\omega_0 T))z^{-1}+z^{-2}}$
$\cos(k\omega_0 T)$	$\frac{(z-\cos(\omega_0 T))z}{z^2-2(\cos(\omega_0 T))z+1}$	$\frac{1-(\cos(\omega_0 T))z^{-1}}{1-2(\cos(\omega_0 T))z^{-1}+z^{-2}}$
$b^k\sin(k\omega_0 T)$	$\frac{(b\sin(\omega_0 T))z}{z^2-2b(\cos(\omega_0 T))z+b^2}$	$\frac{(b\sin(\omega_0 T))z^{-1}}{1-2b(\cos(\omega_0 T))z^{-1}+b^2z^{-2}}$
$b^k\cos(k\omega_0 T)$	$\frac{(z-b\cos(\omega_0 T))z}{z^2-2b(\cos(\omega_0 T))z+b^2}$	$\frac{1-b(\cos(\omega_0 T))z^{-1}}{1-2b(\cos(\omega_0 T))z^{-1}+b^2z^{-2}}$

Tabell 4: z-transformasjons-par

Egenskaper ved z-transformasjonen: Tabell 3.

z-transformasjons-par: Tabell 4.

Transferfunksjon for lineært tidsinvariant kontinuerlig system:

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}[h[k]] = \frac{Y(z)}{U(z)} (\text{initialbet. } 0) \\ &= \frac{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + \cdots + a_1 z + a_0} \end{aligned} \quad (18)$$

Stabilitet av kausalt system:
Stabilt system dersom alle poler $p_i = r_i e^{j\theta_i}$ har $r_i < 1$.

Frekvensanalyse av kontinuerlige signaler:

Fundamentalfrekvens for periodisk signal:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{P} \quad (19)$$

Normalisert energi:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (20)$$

Normalisert effekt:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt \quad (21)$$

Fourierrekke:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 t} \quad (22)$$

Fourierkoeffisienter:

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{P} \int_{t_0}^{t_0+P} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt \\ &= \alpha_m + j\beta_m \end{aligned} \quad (23)$$

Parsevals formel for Fourierrekker:

$$P_{av} = \frac{1}{P} \int_0^P |f(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \quad (24)$$

Fouriertransformasjonen:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \text{ for alle } \omega \quad (25)$$

Invers Fouriertransformasjon:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \text{ for alle } t \quad (26)$$

Sammenheng Laplacetransformasjon – Fouriertransformasjon:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \mathcal{L}[f_+(t)]|_{s=j\omega} \\ &+ \mathcal{L}[f_-(-t)]|_{s=-j\omega} \end{aligned} \quad (27)$$

Fouriertransformasjon av periodiske funksjoner:

$$F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi c_m \delta(\omega - m\omega_0) \quad (28)$$

Parsevals formel for ikkeperiodiske signaler:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (29)$$

Konvolusjon og Fouriertransformasjonen:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \mathcal{F}[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) u(\tau) d\tau] \\ &= H(\omega) U(\omega) \end{aligned} \quad (30)$$

Egenskaper ved Fouriertransformasjonen: Tabell 5.

Frekvensanalyse av diskrete signaler:

Normalisert vinkelfrekvens:

$$\omega = 2\pi \cdot \frac{f}{f_s} \quad (31)$$

Normalisert fundamentalfrekvens for periodisk signal:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (32)$$

Egenskap	Tidsfunksjon	Fourier-transformasjon
Linearitet	$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$	$\alpha_1 F_1(\omega) + \alpha_2 F_2(\omega)$
Frekvensskifting	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
Tidsskift	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
Tidsskalering	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Tidsreversering	$f(-t)$	$F(-\omega)$
Dualitet	$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$	$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$

Tabell 5: Egenskaper ved Fouriertransformasjonen

Normalisert energi:

$$E_\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]|^2 \tag{33}$$

Normalisert effekt:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |f[k]|^2 \tag{34}$$

Tidsdiskret Fourierrekke (DTFS):

$$f[k] = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{jm\omega_0 k} \tag{35}$$

Fourierkoeffisienter:

$$c_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-jm\omega_0 k} = \alpha_m + j\beta_m \tag{36}$$

Parsevals formel for tidsdiskrete Fourierrekker:

$$P_{av} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |f[k]|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} |c_m|^2 \tag{37}$$

Tidsdiskret Fouriertransformasjon (DTFT):

$$F(\omega) = \mathcal{F}_d[f[k]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-j\omega k}, \tag{38}$$

for alle ω.

Invers tidsdiskret Fouriertransformasjon:

$$f[k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega) e^{jk\omega} d\omega \text{ for alle } k \tag{39}$$

Sammenheng z-transformasjon – tidsdiskret Fouriertransformasjon:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d[f[k]] &= \mathcal{Z}[f_+[k]]|_{z=e^{j\omega}} \\ &+ \mathcal{Z}[f_-[-k]]|_{z=e^{-j\omega}} \end{aligned} \tag{40}$$

Tidsdiskret Fouriertransformasjon av periodiske funksjoner:

$$F(\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} 2\pi c_m \delta(\omega - m\omega_0) \tag{41}$$

Parsevals formel for ikkeperiodiske tidsdiskrete signaler:

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\omega)|^2 d\omega \tag{42}$$

Konvolusjon og tidsdiskret Fouriertransformasjon:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \mathcal{F}[\sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[i] \\ &= H(\omega)U(\omega) \end{aligned} \tag{43}$$

Egenskaper ved tidsdiskret Fouriertransformasjon: Tabell 6.

Diskret Fouriertransformasjon (DFT):

$$F[m] = \mathcal{D}[f[k]] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-j2\pi km/N} \tag{44}$$

Invers diskret Fouriertransformasjon:

$$\begin{aligned} f[k] &= \mathcal{D}^{-1}[F[m]] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[m] e^{j2\pi km/N} \end{aligned} \tag{45}$$

Egenskap	Tidsfunksjon	Fourier-transformasjon
Linearitet	$\alpha_1 f_1[k] + \alpha_2 f_2[k]$	$\alpha_1 F_1(\omega) + \alpha_2 F_2(\omega)$
Frekvensskifting	$f[k]e^{j\omega_0 k}$	$F(\omega - \omega_0)$
Tidsskift	$f[k - k_0]$	$e^{-j\omega k_0} F(\omega)$
Tidsskalering	$f[\alpha k]$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Tidsreversering	$f[-k]$	$F(-\omega)$
Dualitet	$F(\omega) = \mathcal{F}\{f[k]\}$	$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F[k]\}$

Tabell 6: Egenskaper ved tidsdiskret Fouriertransformasjon

Diverse:

Løsnings av andregradsligninger:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{46}$$

har løsningen

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{47}$$