19/9-98

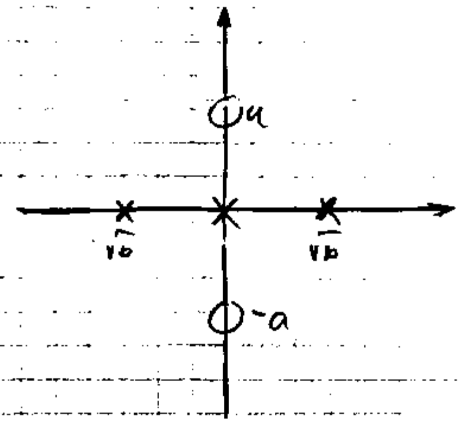
Løsningsforslag, eksamen i Signaler og Systemer | 1
19. september 1998

Oppgave 1

a) Nullpunkt: $z^2 + a^2 = 0$

$$z^2 = -a^2$$

$$z = \pm\sqrt{-a^2} = \pm j\sqrt{a^2} = \pm ja$$



Poler: $z^3 - b^2 z = 0$

$$z = 0 \quad \vee \quad z^2 = b^2$$

$$z = 0 \quad \vee \quad z = \pm b$$

Stabilt dersom polene innenfor enhetssirkelen, d.v.s. dersom: $\underline{b<1}$ (vet allerede at $b>0$)

b) $$\frac{Y(z)}{U(z)} = c\,\frac{z^2 + a^2}{z^3 - b^2 z}$$

$$z^3 Y(z) - b^2 z Y(z) = c z^2 U(z) + c a^2 U(z)$$

$$y[k+3] - b^2 y[k+1] = c u[k+2] + c a^2 u[k]$$

c) Rekursivt $\Rightarrow$ IIR.

d) $$H(z) = 0,1\,\frac{z^2 + 1^2}{z^3 - 0,8^2 z} = 0,1\,\frac{z^2 + 1}{z^3 - 0,64 z}$$

$$H(\omega) = 0,1\,\frac{e^{j2\omega} + 1}{e^{j3\omega} - 0,64 e^{j\omega}}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{H(\omega) H^*(\omega)} = \sqrt{0,1^2\,\frac{(e^{j2\omega}+1)(e^{-j2\omega}+1)}{(e^{j3\omega} - 0,64 e^{j\omega})(e^{-j3\omega} - 0,64 e^{-j\omega})}}$$

$$= 0,1\sqrt{\frac{2 + 2\cos(2\omega)}{0,4096 - 0,64 \cdot 2\cos(2\omega)}}$$

19/9-98

Skal finne fasen: fjerner imaginærdel under brøkstreken

$$H(\omega) = 0{,}1 \frac{(e^{j2\omega}+1)(e^{-j3\omega}-0{,}64e^{-j\omega})}{(e^{j3\omega}-0{,}64e^{j\omega})(e^{-j3\omega}-0{,}64e^{-j\omega})}$$

$$= 0{,}1 \frac{e^{-j\omega}-0{,}64e^{j\omega}+e^{-j3\omega}-0{,}64e^{-j\omega}}{1-0{,}64e^{j2\omega}-0{,}64e^{-j2\omega}+0{,}4096}$$

$$= 0{,}1 \frac{e^{-j2\omega}(e^{j\omega}+e^{-j\omega})-0{,}64(e^{j\omega}+e^{-j\omega})}{1{,}4096-2\cdot 0{,}64\cos(2\omega)}$$

$$= 0{,}1 \frac{2e^{-j2\omega}\cos(\omega)-2\cdot 0{,}64\cos(\omega)}{1{,}4096-1{,}28\cos(2\omega)}$$

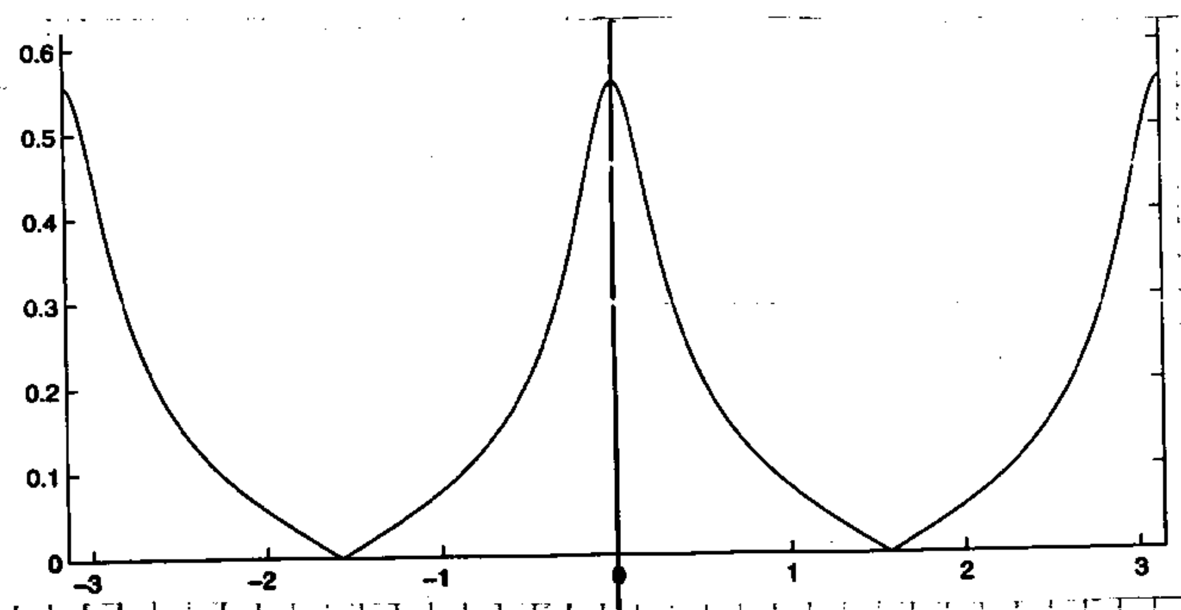
$$= 0{,}2 \frac{\cos(\omega)}{1{,}4096-1{,}28\cos(2\omega)}\left(e^{-j2\omega}-0{,}64\right)$$

$$\angle H(\omega) = \angle\left(e^{-j2\omega}-0{,}64\right) = \angle\left(\cos(2\omega)-j\sin(2\omega)-0{,}64\right)$$

$$= \angle\left((\cos(2\omega)-0{,}64)-j\sin(2\omega)\right)$$

$$= \operatorname{atan}\left(\frac{-\sin(2\omega)}{\cos(2\omega)-0{,}64}\right)$$

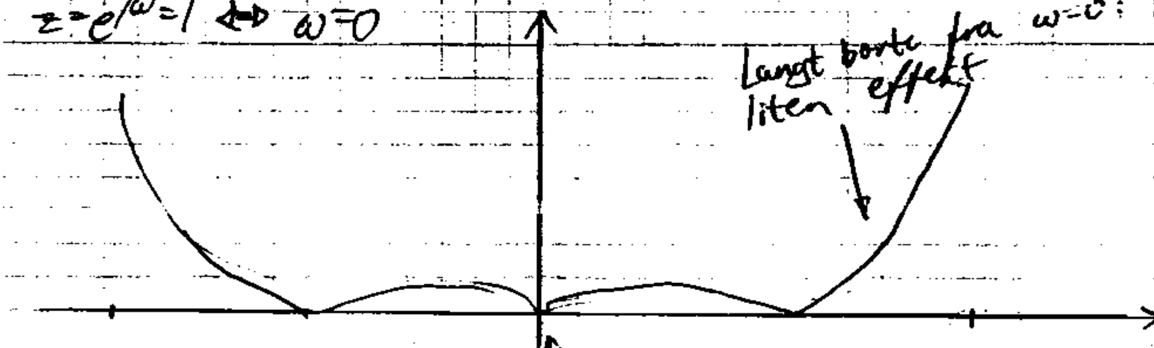
e)



19/9-98

f) Båndstopp-filter.

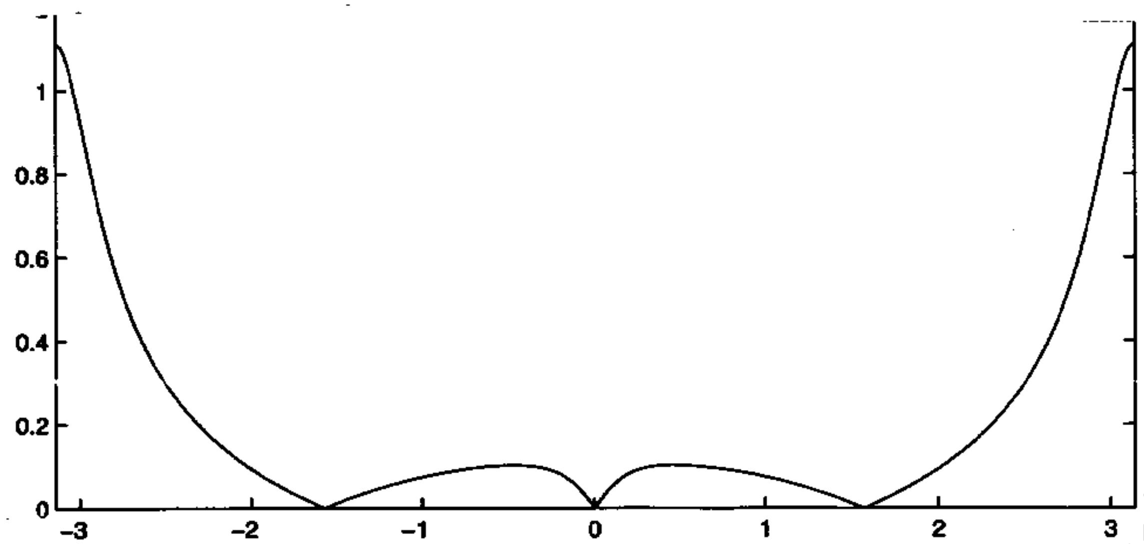
g) $z = e^{j\omega} = 1 \Leftrightarrow \omega = 0$



Effekt: null i $\omega = 0$

Eksempel,

$$H(z) = 0{,}1\,\frac{(z-1)(z^2+1^2)}{z^3-0{,}8^2 z}$$



19/9-98

Oppgave 2

a) Skrive signalet som en sum av dets komponenter.

b) DFT:

$$F[m] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-jkm\frac{2\pi}{N}}$$

DTFS

$$c_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-jkm\frac{2\pi}{N}}$$

Altså: avvik med en konstant faktor.

DTFS er utviklet som en rekkeutvikling av av periodiske signaler i signalenes frekvenskomponenter

DFT er utviklet som en praktisk realisering av DTFT, hvor DTFT'ens kontinuerlige variabel ω er samplet (kontinuerlige variable er ikke realiserbare i datamaskiner) og uendelige sum er tilnærmet med en endelig sum. DFT har altså tatt utgangspunkt i frekvensanalyseteknikken for aperiodiske signaler, og p.g.a. forenklinger og avrundinger har en kommet frem til et uttrykk som viser seg å være lik uttrykket for DTFS, på en konstant nær.

19/9-98

c) Skrivemåten kalles Fourier-rekkeutvikling.
Koeffisientene, c_n, kalles Fourier-koeffisientene.

Anta at vi har signalet $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.
La $f_1(t)$ og $f_2(t)$ være periodisk med periodene hhv. P_1 og P_2. Definer $\omega_i = \frac{2\pi}{P_i}$ og $\omega = \frac{2\pi}{P}$, der P er (den eventuelle) perioden til $f(t)$.
ω er nu gitt som den største felles faktoren til ω_1 og ω_2, d.v.s. det største reelle tallet slik at $\frac{\omega_1}{\omega} \in \mathbb{Z}$ og $\frac{\omega_2}{\omega} \in \mathbb{Z}$, der $\mathbb{Z}$ er mengden av alle heltall.

Av dette slutter vi at

$$f_1(t) = e^{i\omega_1 t} = e^{i\frac{1}{2}\omega t} = e^{i\frac{1}{2}\frac{2\pi}{P}t}$$

ikke kan være slik at $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ er periodisk med periode P, fordi

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\frac{1}{2}\omega}{\omega} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Følgelig vil aldri en frekvenskomponent med frekvens $\frac{1}{2}\frac{2\pi}{P}$ forekomme i et periodisk signal med periode P.

19/4-98

d) $f[k] = [2, 5, 7, 1]$

$$C_m = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f[k]\, e^{-jm\omega_0 k} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{4}$$

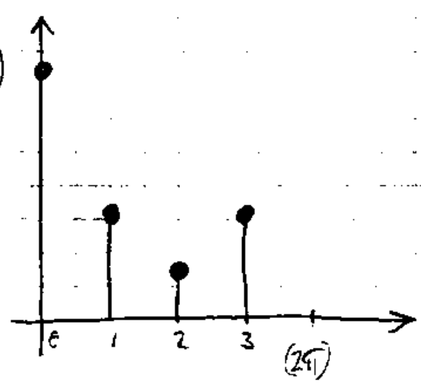
$$c_0 = \frac{1}{4}\left(2+5+7+1\right) = \underline{\frac{15}{4}}$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\left(2+5e^{-j\frac{2\pi}{4}} + 7e^{-j\frac{4\pi}{4}} + 1e^{-j\frac{6\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(2-5j-7+j\right) = \underline{-\frac{5}{4}-j}$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\left(2+5e^{-j\frac{4\pi}{4}} + 7e^{-j\frac{8\pi}{4}} + 1e^{-j\frac{12\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(2-5+7-1\right) = \underline{\frac{3}{4}}$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\left(2+5e^{-j\frac{6\pi}{4}} + 7e^{-j\frac{12\pi}{4}} + 1e^{-j\frac{18\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(2+j5-7-j1\right) = \underline{-\frac{5}{4}+j}$$

e)



f) DFT'en (som FFT'en er utledet fra) er utledet med utgangspunkt i sampling av DTFT med N samples i intervallet 0 til 2π. Her er $N=4$.

Det betyr at DFT-frekvensen m svarer til DTFT-frekv. $\omega = m\frac{2\pi}{N} = m\frac{2\pi}{4}$. Vi vet videre at $\omega=\pi$ svarer til fysisk frekvens $f = \frac{1}{2}f_s = 15\,\text{Hz}$.

Da har vi altså: $m=0 \leftrightarrow 0\,\text{Hz}$

$m=1 \leftrightarrow 7{,}5\,\text{Hz}$

$m=2 \leftrightarrow 15\,\text{Hz}$

$m=3 \leftrightarrow 22{,}5\,\text{Hz}$

19/9-98

Oppgave 3

a) ~~Setter~~ opp de opplysninger vi har gitt

Spenningslikevekt, høyre:	$v_c(t) = v_L(t) + y(t)$	(1)
Spenningslikevekt, venstre:	$u(t) = v_R(t) + v_c(t)$	(2)
Konstant strøm:	$i_R(t) = i_c(t) + i_L(t)$	(3)
Ligning for spole:	$v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$	(4)
Ligning for kondensator:	$i_c(t) = C\dfrac{dv_c(t)}{dt}$	(5)
Ohms lov, R:	$v_R(t) = R\,i_R(t)$	(6)
Ohms lov, R_y:	$y(t) = R_y\, i_L(t)$	(7)

Kombinerer disse ligningene for å komme frem til uttrykket i oppgaven, som kun inneholder $y(t)$ og $u(t)$ sammen med komponentverdiene.

(1) & (2): $y(t) = u(t) - v_R(t) - v_c(t)$

(4) & (6): $y(t) = u(t) - R i_R(t) - L\frac{di_L(t)}{dt}$

(3) : $y(t) = u(t) - R i_c(t) - R i_L(t) - L\frac{di_L(t)}{dt}$

(7) : $y(t) = u(t) - RC\underbrace{\frac{dv_c(t)}{dt}}_{= L\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} = \frac{L}{R_y}\frac{d^2y(t)}{dt^2}} - RC\frac{dy(t)}{dt} - \frac{R}{R_y}y(t) - \frac{L}{R_y}\frac{dy(t)}{dt}$

$$y(t) = u(t) - \frac{RCL}{R_y}\frac{d^2y(t)}{dt^2} - RC\frac{dy(t)}{dt} - \frac{R}{R_y}y(t) - \frac{L}{R_y}\frac{dy(t)}{dt}$$

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{1}{1+\frac{R}{R_y}}\left[u(t) - \frac{RCL}{R_y}\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \left(RC + \frac{L}{R_y}\right)\frac{dy(t)}{dt}\right]}}$$

q.e.d

19/9-98

b)
$$y(t) = \frac{1}{1+\frac{1}{8}}\left[u(t) - \frac{6}{8}\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \left(2+\frac{3}{8}\right)\frac{dy(t)}{dt}\right]$$
$$= \frac{8}{9}\left[u(t) - \frac{3}{4}\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{19}{8}\frac{dy(t)}{dt}\right]$$

c)
$$Y(s) = \frac{8}{9}\left[U(s) - \frac{3}{4}s^2 Y(s) - \frac{19}{8}s\,Y(s)\right]$$
$$\left(1 + \frac{3}{4}s^2 + \frac{19}{8}s\right)Y(s) = \frac{8}{9}U(s)$$
$$\underline{\underline{H(s) = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{3}{4}s^2 + \frac{19}{8}s + 1}}}$$

d) Finner polene:
$$\frac{3}{4}s^2 + \frac{19}{8}s + 1 = 0$$
$$s^2 + \frac{19}{6}s + \frac{4}{3} = 0$$
$$s = \frac{-\frac{19}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{19}{6}\right)^2 - 4\cdot\frac{4}{3}}}{2} = \frac{-\frac{19}{6} \pm \frac{13}{6}}{2} = \begin{cases}-\frac{1}{2}\\ -\frac{8}{3}\end{cases}$$

Begge polene i venstre halvplan $\Rightarrow$ stabilt

e) $u(t) = \sin(100\pi t)$
$$U(s) = \frac{100\pi}{s^2 + (100\pi)^2} = \frac{100\pi}{(s+j100\pi)(s-j100\pi)}$$
$$Y(s) = H(s)\cdot U(s) = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{3}{4}s^2 + \frac{19}{8}s + 1}\cdot\frac{100\pi}{s^2 + (100\pi)^2}$$
$$= \frac{\frac{8}{9}100\pi}{\frac{3}{4}\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{8}{3}\right)\left(s^2+(100\pi)^2\right)}$$
$$= \frac{\frac{32}{27}100\pi}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{8}{3}\right)\left(s+j100\pi\right)\left(s-j100\pi\right)}$$
$$= \frac{A}{s+\frac{1}{2}} + \frac{B}{s+\frac{8}{3}} + \frac{C}{s+j100\pi} + \frac{D}{s-j100\pi}$$

19/9-98

$$\frac{2}{3}100\pi \equiv A\left(s+\frac{8}{3}\right)\left(s+j100\pi\right)\left(s-j100\pi\right)$$
$$+B\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+j100\pi\right)\left(s-j100\pi\right)$$
$$+C\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{8}{3}\right)\left(s-j100\pi\right)$$
$$+D\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{8}{3}\right)\left(s+j100\pi\right)$$

$$\frac{2}{3}100\pi \equiv A\left(s+\frac{8}{3}\right)\left(s^2+(100\pi)^2\right)$$
$$+B\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s^2+(100\pi)^2\right)$$
$$+C\left(s^2+\frac{19}{6}s+\frac{4}{3}\right)\left(s-j100\pi\right)$$
$$+D\left(s^2+\frac{19}{6}s+\frac{4}{3}\right)\left(s+j100\pi\right)$$

$$\frac{2}{3}100\pi \equiv A\left(s^3+\frac{8}{3}s^2+(100\pi)^2 s+\frac{8}{3}(100\pi)^2\right)$$
$$+B\left(s^3+\frac{1}{2}s^2+(100\pi)^2 s+\frac{1}{2}(100\pi)^2\right)$$
$$+C\left(s^3+\left(\frac{19}{6}-j100\pi\right)s^2+\left(\frac{4}{3}-j\frac{19}{6}100\pi\right)s-j\frac{4}{3}100\pi\right)$$
$$+D\left(s^3+\left(\frac{19}{6}+j100\pi\right)s^2+\left(\frac{4}{3}+j\frac{19}{6}100\pi\right)s+j\frac{4}{3}100\pi\right)$$

Det resulterende lineære ligningssettet blir

$$\begin{array}{l} s^3: \\ s^2: \\ s^1: \\ s^0: \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{200\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{1}{2} & \frac{19}{6}-j100\pi & \frac{19}{6}+j100\pi \\ (100\pi)^2 & (100\pi)^2 & \frac{4}{3}-j\frac{19}{6}100\pi & \frac{4}{3}+j\frac{19}{6}100\pi \\ \frac{8}{3}(100\pi)^2 & \frac{1}{2}(100\pi)^2 & -j\frac{4}{3}100\pi & j\frac{4}{3}100\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

som gir

$A = 0{,}95\cdot 10^{-3}$

$B = -0{,}87\cdot 10^{-3}$

$C = 0{,}46\cdot 10^{-4} - j\,0{,}29\cdot 10^{-5} = 0{,}46\cdot 10^{-4}\cdot e^{-j3{,}08}$

$D = 0{,}46\cdot 10^{-4} + j\,0{,}29\cdot 10^{-5} = 0{,}46\cdot 10^{-4}\cdot e^{+j3{,}08}$

$$Y(s) = \frac{0{,}95\cdot 10^{-3}}{s+\frac{1}{2}} - \frac{0{,}87\cdot 10^{-3}}{s+\frac{8}{3}} + \frac{D^*}{s+j100\pi} + \frac{D}{s-j100\pi}$$

19/9-98

$$y(t) = 0{,}95\cdot 10^{-3} e^{-\frac{1}{2}t} - 0{,}87\cdot 10^{-3} e^{-\frac{8}{3}t} + D^* e^{-i\,100\pi t} + D e^{i\,100\pi t}$$

$$= 0{,}95\cdot 10^{-3} e^{-\frac{1}{2}t} - 0{,}87\cdot 10^{-3} e^{-\frac{8}{3}t} + 0{,}46\cdot 10^{-4} \left(e^{-i\,317} + e^{i\,317}\right)$$

$$= 0{,}95\cdot 10^{-3} e^{-\frac{1}{2}t} - 0{,}87\cdot 10^{-3} e^{-\frac{8}{3}t} + 0{,}46\cdot 10^{-4}\cdot 2\cos(317)$$