Løsningsforslag: TE 559 Signaler og Systemer

Trygve Randen

Eksamen 15. mai 1998

Oppgave 1 (løsningsforslag, 15. mai 1998)

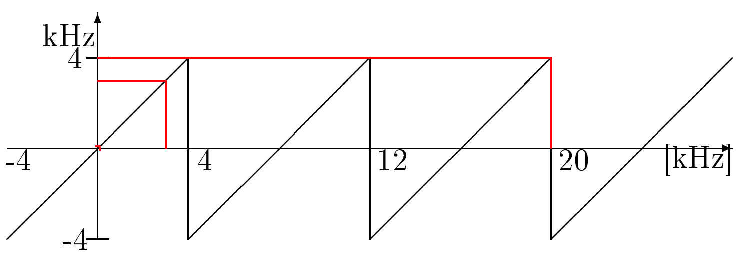
a) Se læreboken.

b) I behandling av data som ikke "avspilles" i sann tid. Eksempler kan være:

- Avspilling av CD – det vil være fullt mulig å hente inn samplene *frem* i tid når nåværende sample skal avspilles – derved kan en ha filtrering som ser frem i tid.
- Behandling av seismikk – alle samples er innsamlet når behandlingen foretas.

c) $64000/8 = 8000$.

d) Bruker den grafiske fremgangsmåten, og avleser fra sagtannkurven nedenfor:



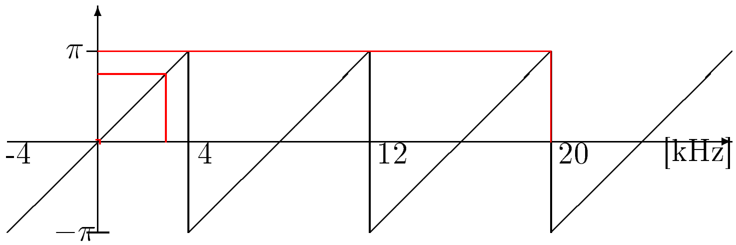
Svarene vi leser av blir da (100Hz frekvensen kan knaps ses på figuren)

$$100\text{Hz} \rightarrow 100\text{Hz} \tag{1}$$

$$3\ 000\text{Hz} \rightarrow 3\ 000\text{Hz} \tag{2}$$

$$20\ 000\text{Hz} \rightarrow 4\ 000\text{Hz} \tag{3}$$

e) Tilsvarende får vi figuren



$$f_1 = 100\text{Hz} \rightarrow \omega_1 = \frac{100}{4000}\pi = 0.025\pi \tag{4}$$

$$f_2 = 3\ 000\text{Hz} \rightarrow \omega_2 = \frac{3000}{4000}\pi = 0.75\pi \tag{5}$$

$$f_3 = 20\ 000\text{Hz} \rightarrow \omega_3 = \pi \tag{6}$$

f) 0.5: amplituden til frekvenskomponenten halvveres
$e^{-j1.2}$: frekvenskomponenten forsinkes med 1.2 i vinkel, d.v.s. den forsinkes med $2\pi \cdot 1.2 = 2.4\pi$ sekund.

Oppgave 2 (løsningsforslag, 15. mai 1998)

a)

$$y[k] = u[k-1] - u[k-3] + u[k-4] - u[k] \tag{7}$$

b)

$$h[k] = \delta[k-1] - \delta[k-3] + \delta[k-4] - \delta[k] \tag{8}$$

$$h[k] = \{-1, 1, 0, -1, 1, 0, 0, 0, \cdots\} = \{-1, 1, 0, -1, 1\} \tag{9}$$

c)

$$u[k] = 1, 2, 3 \tag{10}$$

$$y[k] = u[k] * h[k] = \{-1, -1, -1, 2, -1, -1, 3\}. \tag{11}$$

d)

$$H(z) = -1 + z^{-1} - z^{-3} + z^{-4} \tag{12}$$

e)

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = -1 + e^{-j\omega} - e^{-j3\omega} + e^{-j4\omega} \tag{13}$$

f)

$$\begin{aligned} H[k] &= \sum_{k=0}^{4} h[k] e^{-j2\frac{km}{N}\pi} && (14)\\ &= -1e^0 + 1e^{-j\frac{2}{5}m\pi} + 0e^{-j\frac{4}{5}m\pi} - 1e^{-j\frac{6}{5}m\pi} + 1e^{-j\frac{8}{5}m\pi} && (15)\\ &= -1 + e^{-j\frac{2}{5}m\pi} - e^{-j\frac{6}{5}m\pi} + e^{-j\frac{8}{5}m\pi} && (16) \end{aligned}$$

g) Diskret Fourier-transformasjon, $H[k]$, svarer til sampling i frekvensdomenet av diskret tid Fourier-transformasjon, $H(\omega)$. Følgelig er $H[k] = H(\omega)$ på samplepunktene.

Oppgave 3 (løsningsforslag, 15. mai 1998)

a) Kraftlikevekt gir:
Kraft utover:

$$u(t) \tag{17}$$

Kraft innover:

$$\begin{aligned} k_1 y(t) + k_2 v(t) + ma(t) &= k_1 y(t) + k_2 y'(t) + mv'(t) && (18)\\ &= k_1 y(t) + k_2 y'(t) + my''(t) && (19) \end{aligned}$$

som gir

$$y''(t) = \frac{1}{m}u(t) - \frac{k_1}{m}y(t) - \frac{k_2}{m}y'(t) \tag{20}$$

b)

$$s^2 Y(s) = \frac{1}{m}U(s) - \frac{k_1}{m}y(t) - \frac{k_2}{m}y'(t) \tag{21}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{k_1}{m} + \frac{k_1}{m}s} = \frac{1}{ms^2 + k_2 s + k_1} \tag{22}$$

c) Ustabilt $\Leftarrow$ minst en pol i høyre halvplan, d.v.s. med positiv realdel. Faktoriserer nevneren:

$$ms^2 + k_2 s + k_1 = 0 \tag{23}$$

$$s = \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4mk_1}}{2m} \tag{24}$$

Da ser vi at dersom systemet skal være ustabilt, så må

$$\mathrm{Re}\{k_2\} < \mathrm{Re}\{\sqrt{k_2^2 - 4mk_1}\}. \tag{25}$$

Dersom dette skal være tilfelle, må $m < 0$ eller $k_1 < 0$, noe som ikke svarer til fysisk realiserbare situasjoner.

d) Generelt har vi

$$H(\omega) = \mathcal{L}\left\{h_+(t)\right\}\big|_{s=j\omega} + \mathcal{L}\left\{h_-(-t)\right\}\big|_{s=-j\omega}. \tag{26}$$

Dersom systemet er kausalt, vil $h_-(t) = 0$ og vi får frekvensresponsen

$$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{m(j\omega)^2 + k_2 j\omega + k_1} = \frac{1}{-m\omega^2 + jk_2\omega + k_1}. \tag{27}$$

Amplituderesponsen er absoluttverdien av frekvensresponsen, med andre ord

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= \left|\frac{1}{-m\omega^2 + jk_2\omega + k_1}\right| && (28)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(k_1 - m\omega^2 + jk_2\omega + k_1\right)\left(k_1 - m\omega^2 - jk_2\omega + k_1\right)}} && (29)\\ &= \frac{1}{\sqrt{k_1^2 - 2k_1 m\omega^2 + k_2^2\omega^2 + m^2\omega^4}} && (30) \end{aligned}$$

e) Dersom maksimalpunktet finnes, vil det ligge der hvor den deriverte av $|H(\omega)|$ er null. Maksimalpunktet til $|H(\omega)|$ samsvarer med maksimalpunktet til $|H(\omega)|^2$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega}|H(\omega)|^2 &= \frac{d}{d\omega}\frac{1}{k_1^2 - 2k_1 m\omega^2 + k_2^2\omega^2 + m^2\omega^4} && (31)\\ &= -\frac{-4k_1 m\omega + 2k_2^2\omega + 4m^2\omega^3}{\left(k_1^2 - 2k_1 m\omega^2 + k_2^2\omega^2 + m^2\omega^4\right)^2} = 0. && (32) \end{aligned}$$

Dette gir

$$2k_1 m\omega = k_2^2\omega + 2m^2\omega^3, \tag{33}$$

som har løsningene

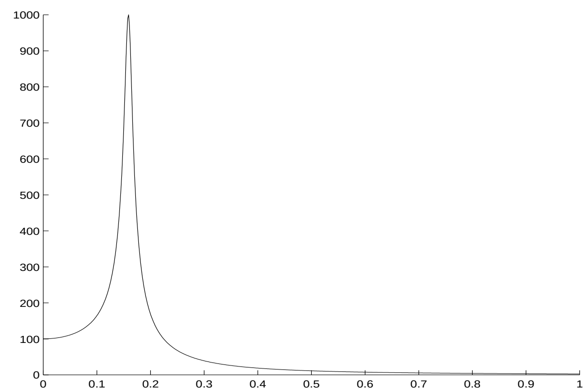
$$\begin{aligned} \omega &= 0 && (34)\\ \omega^2 &= \frac{2k_1 m - k_2^2}{2m^2} \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{2k_1 m - k_2^2}{2m^2}}. && (35) \end{aligned}$$

Intuitivt vet vi at vi kan se bort fra frekvensen null.

f) En stram streng svarer intuitivt til en stiv fjær, med andre ord høy k_1.

En tykk streng vil være tung, med andre ord ha høy m.

Det vil selvfølgelig være andre relasjoner, f.eks. at en tykk streng vil ha økt friksjon, men disse relasjonene kan antas å ha liten innvirkning.



Figur 3h

g) Tykk streng $\Rightarrow$ stor m $\Rightarrow$ law ω. Som vi ser, samsvarer dette med konklusjonen fra forrige deloppgave. En tykk streng gir altså en dyp tone.

   Stram streng $\Rightarrow$ høy k_1 $\Rightarrow$ høy ω_m. Som vi ser, samsvarer dette med konklusjonen fra forrige deloppgave. En stram streng gir altså en lysere tone.

h) Med de oppgitte verdier får vi:

$$H(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + jk_2\omega + k_1}. = \frac{1}{-0.01\omega^2 + j0.001\omega + 0.01}. \tag{36}$$

   og

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 - 2k_1 m\omega^2 + k_2^2\omega^2 + m^2\omega^4}} \tag{37}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0.01^2 - 2\cdot 0.01\cdot 0.01\omega^2 + 0.001^2\omega^2 + 0.01^2\omega^4}} \tag{38}$$

   Grafen til denne funksjonen er illustrert i Figur 3h.

i) Vi setter inn koeffisientene og får

$$\omega_m = \sqrt{\frac{2k_1 m - k_2^2}{2m^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0.01\cdot 0.01 - 0.001^2}{2\cdot 0.01^2}} = 0.9950. \tag{39}$$

   Dette svarer til frekvensen

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{0.9950}{2\pi} = 0.1584, \tag{40}$$

   som vi ser stemmer bra overens med grafen.

j) Vi har

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= H(s)\cdot U(s) = \frac{U(s)}{k_1 + k_2 s + m s^2} && (41)\\
&= \frac{1}{0.01 + 0.001s + 0.01s^2} && (42)\\
&= \frac{100}{1 + 0.1s + s^2}. && (43)
\end{aligned}
$$

Faktoriserer nevneren

$$s^2 + 0.1s + 1 = 0 \tag{44}$$

$$s = \frac{-0.1 \pm \sqrt{0.1^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2} = -0.05 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3.99}. \tag{45}$$

Definerer $a = -0.05 + \frac{1}{2}\sqrt{-3.99}$ og $b = -0.05 - \frac{1}{2}\sqrt{-3.99}$. Da har vi

$$Y(s) = \frac{100}{(s-a)(s-b)} = c_0 + c_1\frac{1}{s-a} + c_2\frac{1}{s-b} \tag{46}$$

og videre

$$
\begin{aligned}
100 &\equiv c_0(s^2 + 0.5s + 1) && (47)\\
&+ c_1(s+b) && (48)\\
&+ c_2(s+a). && (49)
\end{aligned}
$$

Dersom vi nå ordner koeffisientene foran s^k hver for seg, for kver k, får vi:

$$
\begin{aligned}
s^0 :\quad 100 &= 1.0c_0 + bc_1 + ac_2 && (50)\\
s^1 :\quad 0 &= 0.5c_0 + 1c_1 + 1c_2 && (51)\\
s^2 :\quad 0 &= 1.0c_0 + 0c_1 + 0c_2. && (52)
\end{aligned}
$$

Dette gir

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 0 && (53)\\
c_2 &= -c_1 && (54)\\
100 &= bc_1 - ac_1 \Rightarrow c_1 = \frac{100}{b-a} && (55)\\
&\Rightarrow c_2 = \frac{100}{a-b}. && (56)
\end{aligned}
$$

Vi har $a - b = \sqrt{-3.99} = j1.9975$ og $100/(a-b) = -j50.0626$. Da har vi at

$$
\begin{aligned}
y(t) &= j50.0626e^{-0.05t+j0.9988t} - j50.0626e^{-0.05t-j0.9988t} && (57)\\
&= 50.0626e^{-0.05t}\left(e^{j0.9988t+j\frac{1}{2}\pi} + e^{-j0.9988t-j\frac{1}{2}\pi}\right) && (58)\\
&= 100.1252e^{-0.05t}\cos\left(0.9988t + \frac{1}{2}\pi\right). && (59)
\end{aligned}
$$

k) Svaret ovenfor består blant annet av leddene:

- $e^{-0.05t}$ som er en funksjon som avtar med tid. Denne representerer derved dempning og forårsakes av friksjonen.
- $\cos\left(0.9988t + \frac{1}{2}\pi\right)$ som er en ren kosinusfunksjon – altså en ren *grunntone*.