Stavanger, 27. mai 1997

Løsningsforslag til eksamen i TE 559 Signaler og Systemer, 16. mai 1997

Oppgave 1

a) Et system er lineært dersom superposisjonsprinsippet gjelder, d.v.s. at dersom y_i er utgangen ved u_i på inngangen, så vil $ax_1 + bx_2$ gi $ay_1 + by_2$.

b) Et system er tidsinvariant dersom utgangen kun er avhengig av tilstand og inngangssignal, ikke av når inngangssignalet settes i gang.

c) Et system har endelig impulsrespons dersom responsen til impulsen har endelig varighet, og vice versa.

d) Uendelig impulsrespons kan kun oppstå dersom utgangen nå er avhengig av andre utgangsverdier – følgelig har alltid ikke-rekursive systemer endelig impulsrespons. Ser her bort fra spesialtilfellet med uendelig antall tilstandsvariable.

e) I følge diskusjonen ovenfor: ja.

f) $h[k] * u[k] = \{0.25,\ 1.17,\ 2.50,\ 2.92,\ 2.67,\ 1.17,\ 0.17\}$

g)

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \\ &= \frac{1}{2} + 2e \Leftrightarrow j\omega + 3e \Leftrightarrow j2\omega + e \Leftrightarrow j3\omega \end{aligned}$$

h) Se figur 1(h)

i) Se figur 1(i) Det er ikke nødvendig å regne fordi DFT er definert ved samplingen av DTFT.

j) Utvide signalet med nuller.

k) Da DFT på en konstant nær er identisk med diskret-tid Fourier-rekke, er forutsetningene for at DFT'en skal være eksakt de samme som for diskret-tid Fourier-rekken, d.v.s. at signalet er periodisk.

l) Se figur 1(l)

Trygve Randen

Stipendiat

Høgskolen i Stavanger

Institutt for elektroteknikk og databehandling

Postboks 2557 Ullandhaug

4004 Stavanger

Tel.: 51 83 20 26
51 50 64 19

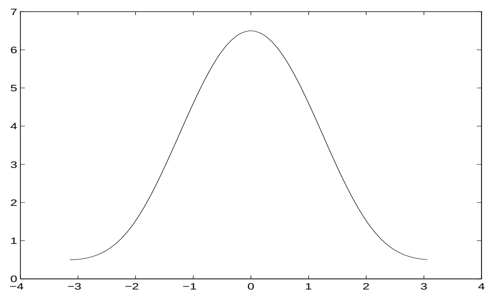
Priv.: 51 52 11 15

Mob.: 920 98 257

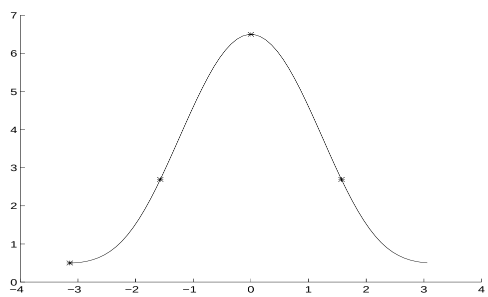
Fax.: 51 83 17 50

E-mail: t.randen@ieee.org

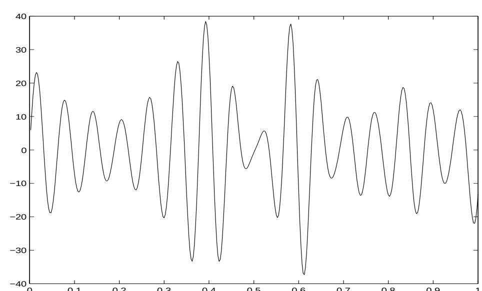
WWW: http://www.hsr.no/˜tranden


0
1
2
3
4
5
6
7
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

(h)


0
1
2
3
4
5
6
7
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

(i)


-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
40
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

(l)

Figur 1:

Oppgave 2

a) $2^{12} \cdot 100 \Leftrightarrow 100 = 5.95$Hz

b) Når vi har aliasing vil man ved å betrakte det samplede signalet naturlig anta at det svarer til et signal med en annen frekvens enn den det opprinnelige signalet hadde.

En gitartone i vår spesifikke problemstilling kan med aliasing oppfattes som en annen gitartone (med en annen frekvens) dersom vi har aliasing.

c) Med høyeste grunntone på 2000Hz, må man i.h.t. samplingsteoremet ha samplingsfrekvens på minst $2 \cdot 2000 = 4000$Hz. Man unngår aliasing fra harmoniske ved å lavpassfiltrere signalet med knekkfrekvens 2kHz før sampling.

d) Med samplingsfrekvens 10kHz svarer diskret tid vinkelfrekvens $\omega = \pi$ til $f = f_s/2$. En frekvensavstand på 5.95hZ svarer da til

$$\frac{5.95\pi}{f_s/2} = \frac{5.95\pi}{5000} = 3.74 \cdot 10^{-3}.$$

Dette betyr at vi sampler DFT-spekteret med sampleavstand $3.74 \cdot 10^{-3}$ i en lengde av 2π, m.a.o. med $2\pi/3.74 \cdot 10^{-3} = 1681$ (alternativt 1680, 1682 eller 1695 samples, avhengig av nøyaktighet på mellomregningene).

e) $1681 * T_s = 1681 * \frac{1}{10000} = 1.68110^{-4}s = 168.1ms$

f) For hvert spektralelement har vi 1681 multiplikasjoner, og med et spekter av lengde 1681 elementer blir totalen altså $1681^2 = 2\ 825\ 761$ multiplikasjoner for hvert spekter.

g) $\frac{2\ 825\ 761}{1.68110^{-4}} = 1.681 \cdot 10^{10}$ multiplikasjoner per sekund.

h) Bruk av en hurtigalgoritme for DFT, f.eks. radix-2. Delsignallengden må i så fall være 2^n den n er et heltall, her medfører det at delsignallengden må være 2048 samples.

i)
- Finn spekteret til delsignalene.
- Finn frekvensene svarende til toppene i spekterene.
- Identifiser frekvensene svarende til toppene som de nærmeste gitartoner.

Merk: sammenligning med ett og ett kjent spekter blir umulig i og med at det er mulig med flere samtidige gitartoner.

Oppgave 3

a)

$$1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{2}{5}z^{-2} = 0$$

$$z^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}z + \frac{2}{5} = 0$$

$$z = \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{1}{4})^2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{2}{5}}}{2} = \begin{cases} a \\ a^* \end{cases}$$

hvor $a = 0.125 + j0.62$.

b) $|a| = |a^*| = 0.6325 < 1 \quad \Rightarrow$ polene ligger innenfor enhetssirkelen $\Rightarrow$ stabilt.

c)

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1 \Leftrightarrow e^{-j2\omega}}{1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{-j\omega} + \frac{2}{5}e^{-j2\omega}}$$

d) Se figurene 2(d)

e) Systemet har båndpass-karakter, det vil si det slipper gjennom frekvenser midt mellom 0Hz og $f_s/2$ (0 og π i diskret-tid vinkelfrekvens). Faseresponsen viser hvordan de enkelte frekvenskomponentene forsinkes, relativt til hverandre. Vi ser f.eks. at den ikke er lineær – følgelig forsinkes ikke alle frekvenser like mye (lineær fase har ikke blitt behandlet i pensum). Flere svar kan godtas på analyse av faseresponsen, men essensen er å få frem at den gir forsinkelsen til de enkelte frekvenser gjennom systemet.

f)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 \Leftrightarrow z^{-2}}{1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{2}{5}z^{-2}}$$

$$(1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{2}{5}z^{-2})Y(z) = (1 \Leftrightarrow z^{-2})U(z)$$

Invers z-transformasjon gir

$$y[k] = \frac{1}{4}y[k \Leftrightarrow 1] \Leftrightarrow \frac{2}{5}y[k \Leftrightarrow 2] + u[k] \Leftrightarrow u[k \Leftrightarrow 2]$$

g) Behandler først $u[k]$: uten tidsskift har vi

$$u_0[k] = \begin{cases} 1 & \text{for } k \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} .$$

z-transformasjon gir

$$U_0(z) = \frac{1}{1 \Leftrightarrow z^{-1}}.$$

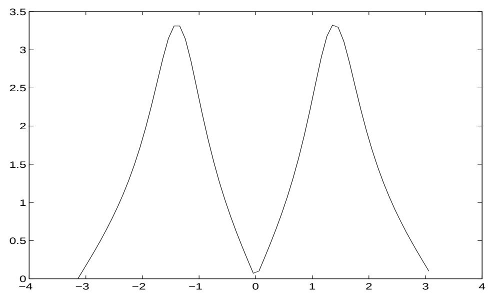
Tidsforsinkelse gir $u[k] = u_0[k \Leftrightarrow 2] \;\to\; U(z) = z^{-2}U_0(z)$.

Null initialbetingelse gir

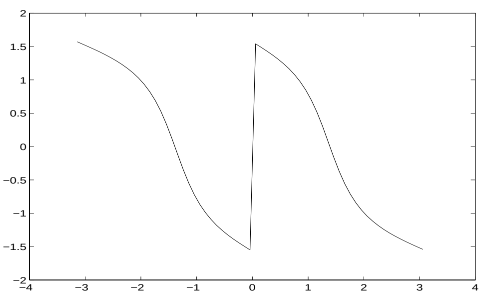
$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)U(z) \\ &= \frac{1 \Leftrightarrow z^{-2}}{1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{2}{5}z^{-2}} z^{-2} \frac{1}{1 \Leftrightarrow z^{-1}} \\ &= \frac{1 \Leftrightarrow z^{-2}}{(1 \Leftrightarrow az^{-1})(1 \Leftrightarrow a^* z^{-1})(1 \Leftrightarrow z^{-1})} z^{-2} \\ &= \left(\frac{A}{1 \Leftrightarrow az^{-1}} + \frac{B}{1 \Leftrightarrow a^* z^{-1}} + \frac{C}{1 \Leftrightarrow z^{-1}} + D \right) z^{-2} \end{aligned}$$

som videre gir

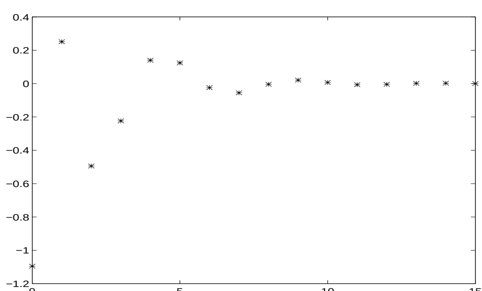
$$\begin{aligned} 1 \Leftrightarrow z^{-2} \equiv\; & A(1 \Leftrightarrow a^* z^{-1})(1 \Leftrightarrow z^{-1}) \\ +\; & B(1 \Leftrightarrow az^{-1})(1 \Leftrightarrow z^{-1}) \\ +\; & C(1 \Leftrightarrow a^* z^{-1})(1 \Leftrightarrow az^{-1}) \\ +\; & D(1 \Leftrightarrow a^* z^{-1})(1 \Leftrightarrow az^{-1})(1 \Leftrightarrow z^{-1}) \end{aligned}$$



(d) – Amplituderespons



(d) – Faserespons



(i)

Figur 2:

og

$$
\begin{aligned}
1 \Leftrightarrow z^{-2} \quad \equiv \quad & A(1 \Leftrightarrow (1+a^*)z^{-1}a^*z^{-2}) \\
+ \quad & B(1 \Leftrightarrow (1+a)z^{-1}az^{-2}) \\
+ \quad & C(1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{2}{5}z^{-2}) \\
+ \quad & D(1 \Leftrightarrow \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{13}{20}z^{-2} \Leftrightarrow \frac{2}{5}z^{-3})
\end{aligned}
$$

som resulterer i det lineære ligningssettet

$$
\begin{aligned}
z^{-0} \quad &: \quad 1 = A + B + C + D \\
z^{-1} \quad &: \quad 0 = \Leftrightarrow A(1+a^*) \Leftrightarrow B(1+a) \Leftrightarrow \frac{1}{4}C \Leftrightarrow \frac{5}{4}D \\
z^{-2} \quad &: \quad \Leftrightarrow 1 = Aa^* + Ba + \frac{2}{5}C + \frac{13}{20}D \\
z^{-3} \quad &: \quad 0 = \Leftrightarrow \frac{2}{5}D.
\end{aligned}
$$

Løsningen av dette er trivielt, og svaret blir

$$
\begin{aligned}
A &= 0.50 \Leftrightarrow j0.91 = 1.04e^{-j1.07} \\
B &= 0.50 + j0.91 = 1.04e^{j1.07} = A^* \\
C &= 0 \\
D &= 0.
\end{aligned}
$$

Da $a = 0.125 + j0.62 = 0.63e^{j1.37}$ får vi

$$
Y(z) = \left(\frac{A}{1 \Leftrightarrow az^{-1}} + \frac{A^*}{1 \Leftrightarrow a^*z^{-1}} \right) z^{-2}
$$

eller

$$
Y(z) = \left(\frac{1.04e^{-j1.07}}{1 \Leftrightarrow 0.63e^{j1.37}z^{-1}} + \frac{1.04e^{j1.07}}{1 \Leftrightarrow 0.63e^{-j1.37}z^{-1}} \right) z^{-2}
$$

og invers z-transformasjon med $Y(z) = Y_0(z)z^{-2}$ gir

$$
\begin{aligned}
y_0[k] &= Aa^k + A^*a^{*k} + 1 \\
&= 2 \cdot 1.04 \cdot 0.63^k \cos(1.37k \Leftrightarrow 1.07)
\end{aligned}
$$

for $k \geq 0$, og

$$
y[k] = 2.08 \cdot 0.63^{k-2} \cos(1.37(k \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 1.07).
$$

for $k \geq 2$.

h) Impulsrespons: $u[k] = h[k]$ og $U(z) = 1$. Da får vi

$$
H(z) = \frac{1 \Leftrightarrow z^{-2}}{(1 \Leftrightarrow az^{-1})(1 \Leftrightarrow a^*z^{-1})} = \frac{A}{1 \Leftrightarrow az^{-1}} + \frac{B}{1 \Leftrightarrow a^*z^{-1}} + C,
$$

som gir

$$
\begin{aligned}
z^{-0} \quad &: \quad 1 = A + B + C \\
z^{-1} \quad &: \quad 0 = \Leftrightarrow Aa^* \Leftrightarrow Ba \Leftrightarrow \frac{1}{4}C \\
z^{-2} \quad &: \quad \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{5}C
\end{aligned}
$$

Løsningen av dette er trivielt, og svaret blir

$$
\begin{aligned}
A &= 0.70e^{-j0.086} \\
B &= 0.70e^{j0.086} = A^* \\
C &= \Leftrightarrow 0.40,
\end{aligned}
$$

som helt ekvivalent med forrige deloppgave gir

$$h[k] = 1.41 \cdot 0.63^k \cos\left(1.37k \Leftrightarrow 0.086\right) \Leftrightarrow \frac{5}{2}\delta[k]$$

for $k \geq 0$.

i) Se figur 2(i)

j) Brattere frekvensrespons $\Leftrightarrow$ lengre impulsrespons, og vice versa, jfr. usikkerhetsprinsippet (Hiessenberg) – s. 351-352 i Chen: System and Signal Analysis, 1992).

Oppgave 4

a)

$$H(z) = C\frac{z \Leftrightarrow \frac{1}{a}}{z \Leftrightarrow a} = C\frac{1 \Leftrightarrow \frac{1}{a}z^{-1}}{1 \Leftrightarrow az^{-1}}$$

b)

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = C\frac{1 \Leftrightarrow \frac{1}{a}e^{-j\omega}}{1 \Leftrightarrow ae^{-j\omega}}$$

c)

$$
\begin{aligned}
|H(\omega)|^2 &= H(\omega)H^*(\omega) \\
&= C\frac{1 \Leftrightarrow \frac{1}{a}e^{-j\omega}}{1 \Leftrightarrow ae^{-j\omega}} \cdot C^*\frac{1 \Leftrightarrow \frac{1}{a}e^{j\omega}}{1 \Leftrightarrow ae^{j\omega}} \\
&= |C|^2\frac{1 \Leftrightarrow \frac{1}{a}e^{-j\omega} \Leftrightarrow \frac{1}{a}e^{j\omega} + \frac{1}{a^2}}{1 \Leftrightarrow ae^{-j\omega} \Leftrightarrow ae^{j\omega} + a^2} \\
&= |C|^2\frac{1 \Leftrightarrow \frac{2}{a}\cos(\omega) + \frac{1}{a^2}}{1 \Leftrightarrow 2a\cos(\omega) + a^2} \\
&= |C|^2\frac{\frac{1}{a^2}\left(a^2 \Leftrightarrow 2a\cos(\omega) + 1\right)}{1 \Leftrightarrow 2a\cos(\omega) + a^2} \\
&= \frac{|C|^2}{a^2} \\
|H(\omega)| &= \frac{|C|}{a}
\end{aligned}
$$

q.e.d.