HØGSKOLEN I STAVANGER

Institutt for elektroteknikk og databehandling

EKSAMEN I: TE 559 Signaler og systemer

VARIGHET: 5 timer

TILLATTE HJELPEMIDLER: Kalkulator, K. Rottmanns formelsamling

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 15 SIDER

MERKNADER: Faglig kontakt under eksamen: Trygve Randen.

Oppgave 1 (32 %)

I Figur 1 har vi gitt en elektrisk krets som tilføres en inngangsspenning $u(t)$ [V], og hvor vi tar ut en utgangsspenning $y(t)$ [V]. Vi skal undersøke kretsens egenskaper, spesielt med tanke på evnen til å plukke ut (filtrere ut) spesielle frekvenskomponenter i inngangssignalet.

a) [4%] Vis at kretsen i Figur 1 beskrives i tidsplanet ved følgende differensiallikning:

$$y(t) + RC \cdot \frac{dy(t)}{dt} = u(t) \tag{1}$$

Oppgitt: Strømmen i en kapasitans C er gitt ved $i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$.

b) [6%] Finn kretsens *overføringsfunksjon (transferfunksjon)* $H(s)$, og dens *impulsrespons* $h(t)$.

c) [4%] Undersøk om kretsen utgjør et *stabilt* system for alle R, C. Svaret må begrunnes. Gi deretter et kort eksempel på hva slags konsekvenser det kan ha hvis et system ikke er stabilt.

d) [5%] Finn kretsens *frekvensrespons* $H(\omega)$, og skriv opp denne på *polar* form (det vil si, $H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j \cdot \angle H(\omega)}$), når $R = 10^4\ \Omega$ og $C = 10^{-6}$ F.

e) [4%] Skissér magnitude-(amplitude-)responsen til kretsen fra og med $\omega = 0$ rad/s til $\omega = 1000$ rad/s. Kommentér ut fra skissen muligheten for å sende henholdsvis lav- og høyfrekvente signaler gjennom kretsen uten at de dempes.

f) [5%] Finn et uttrykk (på så enkel form som mulig) for utgangssignalet $y(t)$ for $t \geq 0$, når $u(t) = e^{-10^3 t}$ for $t \geq 0$, og null ellers. Initialbetingelsene skal også være null.

g) [4%] Forklar *prinsippet* du ville valgt for løsning av problemet i forrige punkt dersom initialbetingelsene *ikke* hadde vært null. Regning er ikke nødvendig!

Oppgave 2 (68 %)

OBS! Oppgaven består av svært mange underpunkter, men det betyr IKKE at alle svarene bygger på hverandre. *Gi derfor ikke opp resten av oppgaven selv om du skulle stå fast på ett eller flere delspørsmål!*

Vi skal lage et tidsdiskret system for å beregne gjennomsnitts-(middel-) temperaturen over de siste 24 timer, ut fra temperaturmålinger gjort hver 4. time. La $u[k]$ betegne den målte temperaturen, og la $y[k]$ betegne den beregnede gjennomsnittstemperaturen over de siste 24 timer. Anta at målinger og beregninger starter i $k = 0$, der k betegner punktprøve-nummer, og at initialbetingelsene er null.

a) [4%] Sammenhengen mellom $u[k]$ og $y[k]$ vil være gitt ved differanselikningen

$$y[k] = \frac{1}{6} \cdot (u[k] + u[k-1] + u[k-2] + u[k-3] + u[k-4] + u[k-5]) \quad (2)$$

Skissér det tilhørende *blokkdiagrammet* som realiserer denne likningen.

b) [8%] Avgjør om systemrealiseringen i a) er

- lineær
- tidsinvariant
- kausal
- rekursiv

Alle svarene må begrunnes kort, helst ut fra betraktning av likningen oppgitt i a).

c) [6%] Finn verdiene i systemets *impulsrespons* $h[k]$ fra og med $k = 0$.

d) [8%] Vis at systemets *overføringsfunksjon* $H(z)$ kan skrives som

$$H(z) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - z^{-6}}{1 - z^{-1}}. \tag{3}$$

(Hint: $\sum_{k=0}^{K-1} a^k = \frac{1-a^K}{1-a}$ for alle endelige a og alle endelige heltall K.)

Skissér det tilhørende blokkdiagrammet for denne realiseringen av systemet. Ser du noen fordeler eller ulemper ved denne måten å bygge systemet på fremfor strukturen fra a), og i så fall, hvilke? Svaret må begrunnes kort.

e) [6%] Finn systemets *nullpunkter, poler og modi*, og skissér pol-nullpunkt-diagrammet. Avgjør om systemet er *stabilt* (Hint: $1 = e^{j \cdot 2\pi m}$ for alle $m = 0, 1, \ldots$). Svaret må begrunnes kort.

f) [6%] Vis at systemets *frekvensrespons* kan skrives som

$$H(\omega) = \frac{1}{3} \cdot (\cos(\frac{\omega}{2}) + \cos(\frac{3\omega}{2}) + \cos(\frac{5\omega}{2})) \cdot e^{-j \cdot \frac{5}{2}\omega} \tag{4}$$

der ω er normalisert vinkelfrekvens. (Hint: Husk Eulers likninger!)

Forklar videre hvilken sammenheng det er mellom fysisk frekvens f i Hz og den normaliserte vinkelfrekvensen ω. Hva blir punktprøvings-(samplings-)frekvensen f_s i Hz for systemet i denne oppgaven? Hva blir de raskeste temperatursvingningene (høyeste fysiske frekvens målt i Hz) vi klarer å gjenskape korrekt ut fra målinger gjort med denne f_s? Alle svarene må begrunnes kort.

g) [6%] Benytt det oppgitte uttrykket for $H(\omega)$ til å skissére systemets magnitude-(amplitude-)respons for $\omega \in [0, \pi]$. Avgjør ut fra skissen om systemet har lav-, høy- eller båndpass-karaktér. Gi deretter et kort fysisk argument for hvorvidt konklusjonen din synes å være rimelig.

h) [6%] For *tre spesielle normaliserte vinkelfrekvenser* vil det være slik at dersom $u[k]$ har energi ulik null *bare* på (en eller flere av) disse frekvensene, vil vi få gjennomsnittstemperaturen $y[k] = 0$ ut. Identifisér de tre normaliserte vinkelfrekvens-verdiene det her er snakk om, og angi hvor disse kan avleses på

- pol-null-punkt-diagrammet
- magnitude-(amplitude)-respons-skissen.

Prøv også å gi et kort *fysisk* argument som forklarer hvorfor svaret blir $y[k] = 0$ når $u[k]$ kun består av disse tre frekvensene.

i) [8%] Anta at vi skal beregne verdier i frekvensresponsen $H(\omega)$ på datamaskin. Forklar kort hvorfor, og hvordan, vi kan bruke *den diskrete Fouriertransformen (DFT)* til å gjøre dette. Plott verdiene i magnitude-(amplitude-)delen av en slik DFT av lengde

- $N = 6$
- $N = 10$.

(Hint: Oppgaven lar seg løse også uten resultatet fra g), men bruk av dette vil kunne forenkle løsningen mye.)

Kommentér resultatene kort med hensyn på mulighetene for visualisering (plotting, fremvisning) av detaljer i magnituden til $H(\omega)$ ut fra de plottede DFT-verdiene i hvert av de to tilfellene. Hvilken operasjon har vi implisitt utført i tidsplanet for å oppnå resultatet for $N = 10$?

j) [4%] Hva blir den *korteste* lengden vi kan velge for en DFT for et signal av lengde $N = 6$, dersom *radix-2-FFT-algoritmen* skal benyttes i beregningen? Hvor stor besvarelse i antall multiplikasjoner får vi ved bruk av denne algoritmen i dette tilfellet, i forhold til å bruke DFT-formelen direkte? Svarene må begrunnes.

k) [6%] Finn et matematisk utrykk (på så enkel form som mulig) for gjennomsnittstemperaturen $y[k]$ for $k = 0, 1, \ldots$ når $u[k] = 10 \cdot (1 + (-0.25)^k)$ for $k = 0, 1, \ldots$, og null ellers.

Formelark til bruk ved eksamen 28.05.1996 i emne TE 559 Signaler og systemer

Signaler:

Periodisk signal:

$$\begin{aligned} f(t+P) = f(t),&\ \text{kontinuerlig signal,} \\ f[k+N] = f[k],&\ \text{diskret signal.} \end{aligned} \tag{5}$$

Kompleks eksponential (Eulers formel):

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{j\omega t} = \cos\omega t + j \cdot \sin\omega t,\ \text{kontinuerlig signal,} \\ f[k] &= e^{j\omega k} = \cos\omega k + j \cdot \sin\omega k,\ \text{diskret signal.} \end{aligned} \tag{6}$$

Systemer:

Integrator:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau \tag{7}$$

Forsinkelse:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t-\tau),\ \text{kontinuerlig system,} \\ y[k] &= u[k-k_0],\ \text{diskret system.} \end{aligned} \tag{8}$$

Superposisjonsprinsippet:

$$\begin{aligned} \{\alpha_1 \cdot u_1(t) + \alpha_2 \cdot u_2(t)\} &\rightarrow \{\alpha_1 \cdot y_1(t) + \alpha_2 \cdot y_2(t)\},\ \text{kontinuerlig system,} \\ \{\alpha_1 \cdot u_1[k] + \alpha_2 \cdot u_2[k]\} &\rightarrow \{\alpha_1 \cdot y_1[k] + \alpha_2 \cdot y_2[k]\},\ \text{diskret system.} \end{aligned} \tag{9}$$

Totalrespons til lineært system:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y_{zi}(t) + y_{zs}(t), \text{ kontinuerlig system,} \\
y[k] &= y_{zi}[k] + y_{zs}[k], \text{ diskret system.}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Tidsinvarians:

$$
\begin{aligned}
&\text{Initialtilstand } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \text{ og inngang } u(t) \text{ for } t \geq t_0 \text{ gir utgang } y(t), t \geq t_0 \\
&\text{medfører at} \\
&\text{Initialtilstand } \mathbf{x}(t_0 + T) = \mathbf{x}_0 \text{ og inngang } u(t) \text{ for } t \geq t_0 + T \text{ gir utgang } y(t), t \geq t_0 + T \\
&\text{Tilsvarende for diskrete systemer med } t_0 \text{ og } T \text{ lik heltall } k_0, K.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Kausalitet:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= 0 \text{ for } t < 0, \text{ kontinuerlig system,} \\
h[k] &= 0 \text{ for } k < 0, \text{ diskret system.}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Konvolusjon, differanse- og differensiallikninger:

Impulsrespons:

$$
\begin{aligned}
u[k] &= \delta[k] \text{ medfører } y[k] = h[k] \text{ for diskrete systemer } (\delta[k] \text{ er enhetspulsen}), \\
u(t) &= \delta(t) \text{ medfører } y(t) = h(t) \text{ for kontinuerlige systemer } (\delta(t) \text{ er en Diracpuls}).
\end{aligned} \tag{13}
$$

Diskret konvolusjon:

$$
y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[i] = h[k] * u[k] \tag{14}
$$

Differanselikning for lineært tidsinvariant diskret system:

$$\begin{aligned} & y[k+N] + a_{N-1} \cdot y[k+N-1] + \cdots + a_1 \cdot y[k+1] + a_0 \cdot y[k] \\ = \; & b_M \cdot u[k+M] + b_{M-1} \cdot u[k+M-1] + \cdots + b_1 \cdot u[k+1] + b_0 \cdot u[k] \end{aligned} \tag{15}$$

Kontinuerlig konvolusjon:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau = u(t) * h(t) \tag{16}$$

Differensiallikning for lineært tidsinvariant kontinuerlig system:

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) \\ = \; & b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \tag{17}$$

Laplacetransformen og kontinuerlig systemanalyse:

Laplacetransformen:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \tag{18}$$

Invers Laplacetransform:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \text{ for } t \geq 0 \tag{19}$$

Egenskaper ved Laplacetransformen:

Laplacetransform-par:

Transferfunksjon for lineært tidsinvariant kontinuerlig system:

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathcal{L}[h(t)] = \frac{Y(s)}{U(s)} \text{(initialbetingelser 0)} \\ &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \end{aligned} \tag{20}$$

Poler i transferfunksjon (også for diskrete systemer):

$$\text{De } p_i \text{ som gjør at } H(p_i) = \infty. \tag{21}$$

Nullpunkter i transferfunksjon (også for diskrete systemer):

$$\text{De } z_i \text{ som gjør at } H(z_i) = 0. \tag{22}$$

Stabilitet av kausalt system:

$$\text{Stabilt system dersom alle poler } p_i = \sigma_i + j\omega_i \text{ har } \sigma_i < 0. \tag{23}$$

z-transformen og analyse av diskrete systemer:

Ensidig z-transform:

$$F(z) = \mathcal{Z}[f[k]] = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k} \tag{24}$$

Invers z-transform:

$$f[k] = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(z) z^{k-1} dz \text{ for } k \geq 0. \tag{25}$$

(C er en lukket kontur i z-planet.)

Sammenheng Laplacetransform – z-transform:

$$\mathcal{Z}[f(kT)] = \mathcal{L}[f_s(t)]|_{z=e^{Ts}} \tag{26}$$

Egenskaper ved z-transformen:

z-transform-par:

Transferfunksjon for lineært tidsinvariant kontinuerlig system:

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}[h[k]] = \frac{Y(z)}{U(z)}\text{(initialbetingelser 0)} \\ &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \end{aligned} \tag{27}$$

Stabilitet av kausalt system:

$$\text{Stabilt system dersom alle poler } p_i = r_i e^{j\theta_i} \text{ har } r_i < 1. \tag{28}$$

Frekvensanalyse av kontinuerlige signaler:

Fundamentalfrekvens for periodisk signal:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{P} \tag{29}$$

Normalisert energi:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \tag{30}$$

Normalisert effekt:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt \tag{31}$$

Fourierrekke:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 t} \tag{32}$$

Fourierkoeffisienter:

$$c_m = \frac{1}{P}\int_{t_0}^{t_0+P} f(t)e^{-jm\omega_0 t} dt = \alpha_m + j\beta_m \tag{33}$$

Parsevals formel for Fourierrekker:

$$P_{av} = \frac{1}{P}\int_0^P |f(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \tag{34}$$

Fouriertransformen:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \text{ for alle } \omega \tag{35}$$

Invers Fouriertransform:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \text{ for alle } t \tag{36}$$

Sammenheng Laplacetransform – Fouriertransform:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{L}[f_+(t)]|_{s=j\omega} + \mathcal{L}[f_-(-t)]|_{s=-j\omega} \tag{37}$$

Fouriertransform av periodiske funksjoner:

$$F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi c_m \delta(\omega - m\omega_0) \tag{38}$$

Parsevals formel for ikkeperiodiske signaler:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \tag{39}$$

Konvolusjon og Fouriertransformen:

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) u(\tau) d\tau] = H(\omega)U(\omega) \tag{40}$$

Egenskaper ved Fouriertransformen:

Frekvensanalyse av diskrete signaler:

Normalisert vinkelfrekvens:

$$\omega = 2\pi \cdot \frac{f}{f_s} \tag{41}$$

Normalisert fundamentalfrekvens for periodisk signal:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} \tag{42}$$

Normalisert energi:

$$E_\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]|^2 \tag{43}$$

Normalisert effekt:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |f[k]|^2 \tag{44}$$

Tidsdiskret Fourierrekke (DTFS):

$$f[k] = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{jm\omega_0 k} \tag{45}$$

Fourierkoeffisienter:

$$c_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-jm\omega_0 k} = \alpha_m + j\beta_m \tag{46}$$

Parsevals formel for tidsdiskrete Fourierrekker:

$$P_{av} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |f[k]|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} |c_m|^2 \tag{47}$$

Tidsdiskret Fouriertransform (DTFT):

$$F(\omega) = \mathcal{F}_d[f[k]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-j\omega k} \text{ for alle } \omega \tag{48}$$

Invers tidsdiskret Fouriertransform:

$$f[k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega) e^{jk\omega} d\omega \text{ for alle } k \tag{49}$$

Sammenheng z-transform – tidsdiskret Fouriertransform:

$$\mathcal{F}_d[f[k]] = \mathcal{Z}[f_+[k]]|_{z=e^{j\omega}} + \mathcal{Z}[f_-[-k]]|_{s=e^{-j\omega}} \tag{50}$$

Tidsdiskret Fouriertransform av periodiske funksjoner:

$$F(\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} 2\pi c_m \delta(\omega - m\omega_0) \tag{51}$$

Parsevals formel for ikkeperiodiske tidsdiskrete signaler:

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\omega)|^2 d\omega \tag{52}$$

Konvolusjon og tidsdiskret Fouriertransform:

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[\sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[i] = H(\omega)U(\omega) \tag{53}$$

Egenskaper ved tidsdiskret Fouriertransform:

Som i Tabell 6.3.

Diskret Fouriertransform (DFT):

$$F[m] = \mathcal{D}[f[k]] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k]e^{-j2\pi km/N} \tag{54}$$

Invers diskret Fouriertransform:

$$F[m] = \mathcal{D}^{-1}[F[m]] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F[m]e^{j2\pi mk/N} \tag{55}$$